CPI A2 / 14/03/25

Corrections

$\boxed{\text{FVP s. 7.2.2 q: 1)}}$ CT

$\boxed{\text{Test type TONIC sur la T.L. ex 1}}$ CT

$\boxed{\text{Recherche}}$

$\boxed{\text{Test type TONIC sur la T.L. ex 2}}$ CT

$\boxed{\text{Test type TONIC sur les FPV}}$ CT

$\boxed{\text{Test type TONIC Compilation d'exercices}}$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$

$$h(x,y) = 10.(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

1) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = 10(2y - 6x - 18)$

$\dfrac{\partial h}{\partial y} = 10(2x - 8y + 28)$

On détermine le(s) point(s) critique(s) de h.

$$(a,b) \text{ pt. critique de } h \iff \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6a + 2b = 18 \\ 2a - 8b = -28 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3a + b = 9 \\ a - 4b = -14 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 4b = -14 \\ -3a + b = 9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - 4b = -14 \\ -11b = -33 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1)$$

$$\iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Donc le sommet de la coline est situé à 2 km à l'ouest et 3 km au nord par rapport au village.

2) $h(-2;3) = 10(-12 - 3.4 - 4.9 - 18.(-2) + 28.3 + 12)$

$= 10.(-24 - \cancel{36} + \cancel{36} + 84 + 12)$

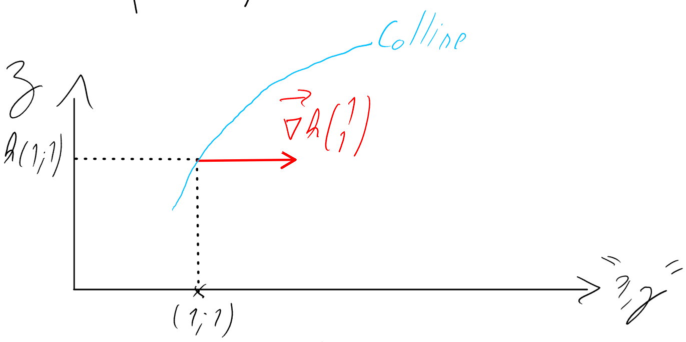
$= 10(72)$

$= 720$

Le sommet de la colline est à 720 m d'altitude.

3) $$\vec{\nabla} h\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.(2 - 6 - 18) \\ 10.(2 - 8 + 28) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -220 \\ 220 \end{pmatrix}$$



Dans la direction $\vec{\nabla} h\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ on gagne $\left\|\vec{\nabla} h\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|$ mètres d'altitude par km.

$\left\|\vec{\nabla} h\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{220^2 + 220^2} = 220.\sqrt{2} \simeq 311,13$

$311,13 \ \dfrac{m}{km} = 0,311\,13 \ \dfrac{km}{km} = 31,113\,\%$

1 km au nord et 1 km à l'est du village, la raideur de la pente est d'environ 31,113 %.

4 $\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 10(2y-6x-18) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 10(2x-8y+28) \end{cases}$

$$\left\| \vec{\nabla} h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = 100\Big[\underbrace{(2y-6x-18)^2+(2x-8y+28)^2}_{g(x,y)}\Big]$$

On cherche en quel point g atteint sa valeur maximale.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -12(2y-6x-18)+4(2x-8y+28)$$
$$= 72x-24y+216+8x-32y+112$$
$$= 80x-56y+328$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 4(2y-6x-18)-16(2x-8y+28)$$
$$= -56x+136y-520$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)=0 \end{matrix} \iff \begin{cases} 10x-7y+41=0 \\ -7x+17y-65=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x-7y+41=0 \\ (170-49)y = 650-7.41 \quad (L_2 \leftarrow 10L_2+7L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x-7y=-41 \\ 121y=363 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x = -41+7\times 3 \\ y = \dfrac{363}{121} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

C'est à 2 km à l'est et à 3 km au nord du village que la pente est la plus raide.

Et dans la direction

$$-\vec{\nabla} h\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 10(6-12-18) \\ 10(4-24+28) \end{pmatrix}$$

$$= 10\begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ie: dans la direction $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

I 1 $mx''(t) = T_x(t)$

$$mx''(t) = -k\,x(t)$$

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$x'' + \omega_0^2 . x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$

$$x'' + 2x = 0$$

1 a $\quad r^2+2=0$

2 b $\quad \pm i\sqrt{2}$

2 c $\begin{cases} x(t) = A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t) \\ x(0) = 0{,}3 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$x'(t) = -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}t) + B\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)$$

$$\begin{cases} A = 0,3 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 0,3 \cos(\sqrt{2}\, t)$$

II ① $m x''(t) = -k x(t) - a x'(t)$

$$x'' + \frac{a}{m} x' + \omega_0^2 x = 0$$

② $r^2 + \frac{a}{m} r + \omega_0^2 = 0$

$$r^2 + r + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7$$

$$r \in \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$x(t) = e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

$x(0) = 0,3$

$A = 0,3$

$$x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$
$$+ e^{-t/2}\left(-A\frac{\sqrt{7}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

$$0 = x'(0) = -\frac{1}{2}(A) + \left(B\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3$$

$$B = \frac{0,3}{\sqrt{7}}$$

$$x(t) = e^{-t/2}\left(0,3 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{0,3}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

$\boxed{\text{Exercice 6}}$

① $m\ell''(t) = G(t) + T(t)$

$$m\ell''(t) = -gm - k\ell(t)$$

$$\ell''(t) + \frac{k}{m}\ell(t) = -g$$

$$\ell''(t) + \omega_0^2\ell(t) = -g \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ell''(t) + 4\ell(t) = -g$$

② ⓐ $\ell_p(t) = -\frac{g}{4}$ Solution particulière

$r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm 2i$

$$\ell(t) = -\frac{g}{4} + A\cos(2t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \ell(0) = -0,4 \\ \ell'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{g}{4} + A\cos(\varphi) = -0,4 \\ -2A\sin(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

Si $\varphi = \pi$, on aurait $-\frac{g}{4} + 0,4 = A < 0$

Donc $\varphi = 0$

$$-\frac{g}{4} + A = -0,4$$

$$A = \frac{g}{4} - 0,4$$

$$\ell(t) = -\frac{g}{4} + \left(\frac{g}{4} - 0,4\right)\cos(2t)$$

phaseur : $\left(\frac{g}{4} - 0,4\right)e^{i0}$

Amplitude : $\frac{g}{4} - 0,4$

Phase initiale : 0

2 b) $\rho(t) = -\frac{g}{4}$

Phaseur : 0

<< $A = 0$

φ non déf >>

2 c) $\begin{cases} \rho(0) = 0 \\ \rho'(0) = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{g}{4} + A\cos(\varphi) = 0 \\ -2A\sin(\varphi) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = \frac{g}{4} \\ A\sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{1/2}{g/4} = \frac{2}{g}$$

$\left.\begin{matrix} \cos\varphi > 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{matrix}\right)$ Donc $\varphi \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{g}\right)$$

$$A = \frac{g}{4}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\arctan(\frac{2}{g}))}} = \frac{g}{4}\sqrt{1 + \frac{4}{g^2}}$$

$$A = \frac{g}{4}\,\frac{1}{g}\sqrt{g^2+4}$$

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{g^2+4}$$

$$\rho(t) = -\frac{g}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{g^2+4}\cos\left(2t + \arctan\left(\frac{2}{g}\right)\right)$$

2 d) $\begin{cases} \rho(0) = \frac{2}{5} \\ \rho'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{g}{4} + A\cos(\varphi) = \frac{2}{5} \\ -2A\sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A^2 = \left(\frac{2}{5} + \frac{g}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^2$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{2}{5} + \frac{g}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}}$$

$\left.\begin{matrix} \cos(\varphi) > 0 \\ \sin(\varphi) < 0 \end{matrix}\right)$ Donc : $\varphi \in]\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$

$\varphi - 2\pi \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[$

$$\tan(\varphi) = \frac{-1/4}{\frac{2}{5} + \frac{g}{4}}$$

$$\varphi - 2\pi = -\arctan\left(\frac{1}{4(\frac{2}{5} + \frac{g}{4})}\right)$$

$$\varphi = 2\pi - \arctan\left(\frac{1}{4(\frac{2}{5} + \frac{g}{4})}\right)$$