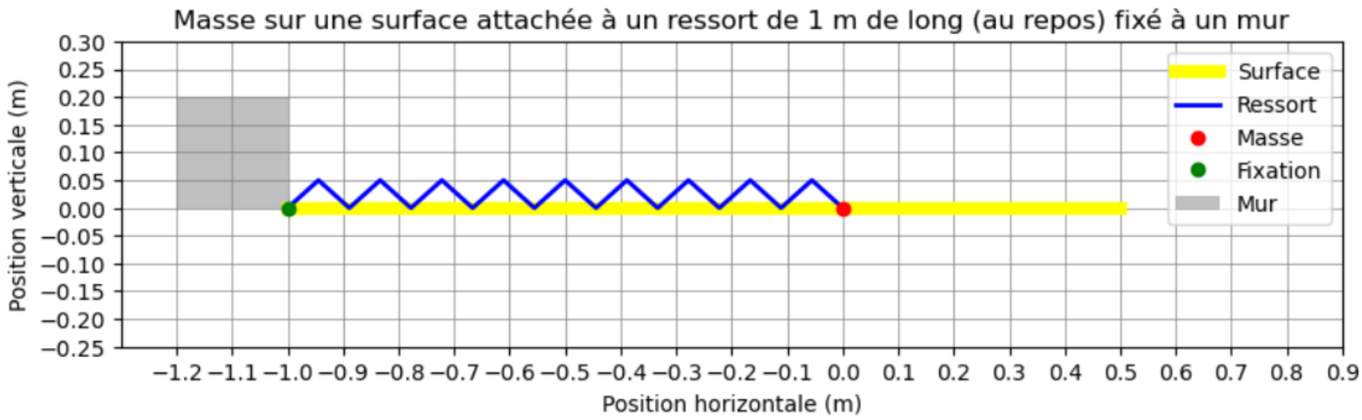
CORRECTION DU SUJET DE TYPE TOMIC RÉDACTIONNEL SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

S. Labopin

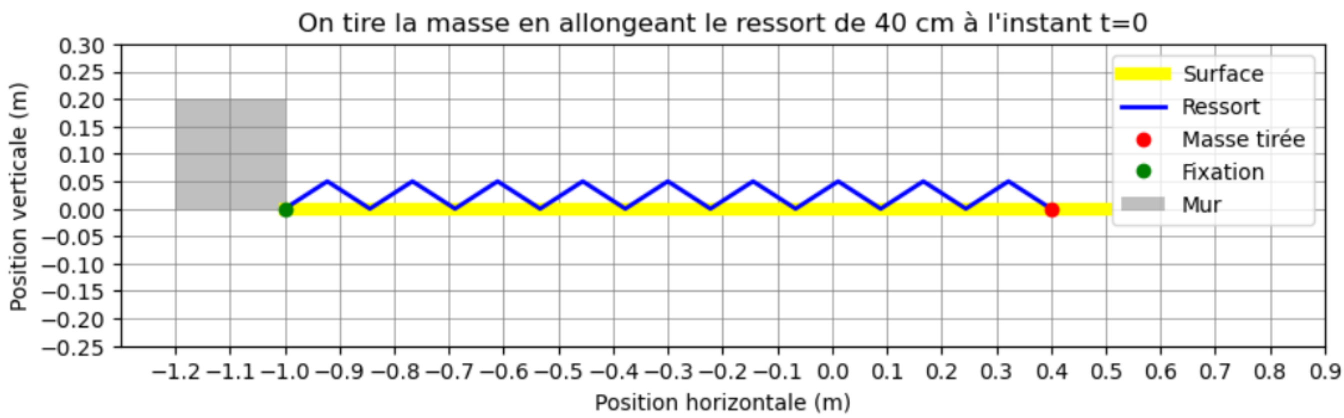
Table des matières

Description du problème

Une masse m de 2 kg est posée sur une surface horizontale et est attachée à un ressort idéal de constante de raideur $k = 8\ N/m$ et de longueur au repos de 1 m. Ce ressort est fixé à un mur à son autre extrémité :



La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 40 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale.

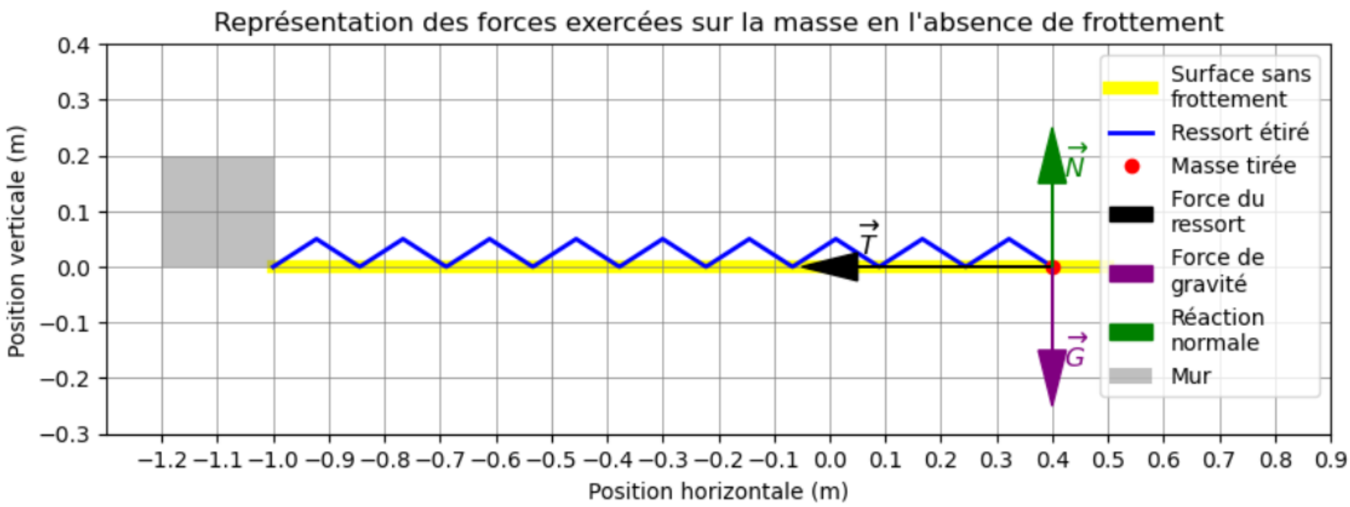


On cherche à déterminer le mouvement de cette masse, c'est-à-dire sa position en fonction du temps.

I. **Sans frottement :**

On suppose que le système évolue sans frottement ni autres forces extérieures. La masse n'est donc soumise qu'aux trois forces suivantes :

- La force du ressort $\overrightarrow{T}$: Cette force agit toujours dans le sens opposé à la déformation du ressort. À l'instant $t = 0$, puisque le ressort est étiré, la force du ressort tente de ramener la masse vers la position de l'extrémité non fixé au mur du ressort quand celui-ci est au repos (n'est pas déformé). Elle est due à la loi de Hooke, qui stipule que la force exercée par un ressort est proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort par rapport à sa longueur au repos. Le coefficient de proportionnalité est appelé la constante de raideur.
- La force de gravité $\overrightarrow{G}$: Cette force agit verticalement vers le bas, attirant la masse vers le centre de la Terre. Elle est due à l'attraction gravitationnelle entre la masse de la Terre et la masse représentée en rouge.
- La réaction normale $\overrightarrow{N}$: C'est la force de support que la surface exerce sur la masse. La masse étant en contact avec la surface horizontale, cette force est verticale et dirigée vers le haut, exactement opposée à la force de gravité. Elle résulte du troisième principe de Newton, selon lequel à chaque action correspond une réaction égale et opposée. Cela signifie que si un objet exerce une force sur une surface, la surface exerce une force de magnitude égale mais de direction opposée sur l'objet.



Comme dans les figures, on se place dans le référenciel $\mathscr{R} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où :

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ représente la position de la masse quand le ressort est au repos.
- $\overrightarrow{i}$ représente le déplacement horizontal d'un mètre dans la direction où le ressort s'étire. Le ressort au repos est donc d'extrémités $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{j}$ représente le déplacement vertical d'un mètre vers le haut.

On note $M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$ la position de la masse à l'instant t dans le référenciel $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix}-kx(t)\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{R}} = -kx(t)\,\overrightarrow{i}$$

1. En appliquant la deuxième loi de Newton (appelée aussi le principe fondamental de la dynamique), on obtient :

$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) + \overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{N}(t)$$
$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) \qquad \text{(car } \overrightarrow{N}(t) = -\overrightarrow{G}(t) \text{ d'après le troisième principe de Newton)}$$

En déduire une équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) \iff m.\left(x''(t)\,\overrightarrow{i} + y''(t)\,\overrightarrow{j}\right) = -kx(t)\,\overrightarrow{i}$$

$$\begin{aligned}
&\iff m.\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} m.x''(t) \\ m.y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} m.x''(t) = -k.x(t) \\ m.y''(t) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
mx''(t) = -kx(t) &\iff mx''(t) + kx(t) = 0 \\
&\iff x''(t) + \frac{k}{m}.x(t) = 0
\end{aligned}$$

Donc $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$\boxed{y'' + \frac{k}{m}.y = 0}$$

2. *a*) Déterminer l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente.
Cette équation est une équation différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On peut donc bien parler d'équation caractéristique associée. Son équation caractéristique associée est l'équation suivante d'inconnue x :

$$\boxed{x^2 + \frac{k}{m} = 0}$$

b) Déterminer la ou les solutions de l'équation caractéristique.
Le discriminant du trinôme $x^2 + 0.x + \frac{k}{m}$ est $\Delta = 0^2 - 4\frac{k}{m} = -4\frac{k}{m}$. Comme $\Delta < 0$ et que les coefficients sont réels, l'équation caractéristique admet les deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ avec $a = 1$ et $b = 0$, c'est-à-dire $-i.\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $i.\sqrt{\frac{k}{m}}$.
On note ω la pulsation propre propre de cet oscillateur harmonique non amorti et libre :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En définitive :

$$\boxed{\text{Les deux solutions de l'équation caractéristiques sont } -i\omega \text{ et } i\omega \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

c) Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$.
D'après le cours sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, les solutions de $y'' + \frac{k}{m}.y = 0$ sont les fonctions de forme générale :

$$y(t) = e^{ut}(A.\cos(vt) + B.\sin(vt)) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles et } u+vt,\ u-vt \text{ sont les deux solutions conjuguées de l'équation caractéristique}$$

Comme la partie réelle u des solutions de l'équation caractéristique est nulle et que la valeur absolue de leur partie imaginaire est ω, alors les solutions de $y'' + \frac{k}{m}.y = 0$ sont les fonctions de forme générale :

$$y(t) = A.\cos(\omega.t) + B.\sin(\omega.t) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles}$$

En définitive, comme $x(t)$ est une solution de cette équation, il existe deux réels A et B tels que :

$$x(t) = A.\cos(\omega.t) + B.\sin(\omega.t)$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
Pour ce faire, on utilise les conditions initiales contenues dans la phrase de l'énoncé suivante :

> *« La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 40 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale. »*

En effet, l'information contenue dans cette phrase se traduit mathématiquement en les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Remarque : La position $x(t)$ de la masse est la solution du problème de Cauchy d'inconnue y suivant :

$$\begin{cases} y'' + \frac{k}{m}.y = 0 \\ y(0) = 0,4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour récapituler, on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = A.\cos(\omega.t) + B.\sin(\omega.t) \\ x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{cases}}$$

On détermine A et B :

$$\begin{aligned}
& x(t) = A.\cos(\omega.t) + B.\sin(\omega.t) \\
& x'(t) = -A.\omega.\sin(\omega.t) + B.\omega.\cos(\omega.t) \\
& x'(0) = 0 \\
& -A.\omega.\sin(\omega \times 0) + B.\omega.\cos(\omega \times 0) = 0 \\
& -A.\omega.\sin(0) + B.\omega.\cos(0) = 0 \\
& -A.\omega \times 0 + B.\omega \times 1 = 0 \\
& B.\omega = 0 \\
& \boxed{B = 0} \\
& x(t) = A.\cos(\omega.t) + 0 \times \sin(\omega.t) \\
& x(t) = A.\cos(\omega.t) \\
& x(0) = 0,4 \\
& A.\cos(\omega \times 0) = 0,4 \\
& A.\cos(0) = 0,4 \\
& A \times 1 = 0,4 \\
& \boxed{A = 0,4 = \frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

En définitive l'expression de la position $x(t)$ de la masse est :

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{5}\cos(\omega.t) \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

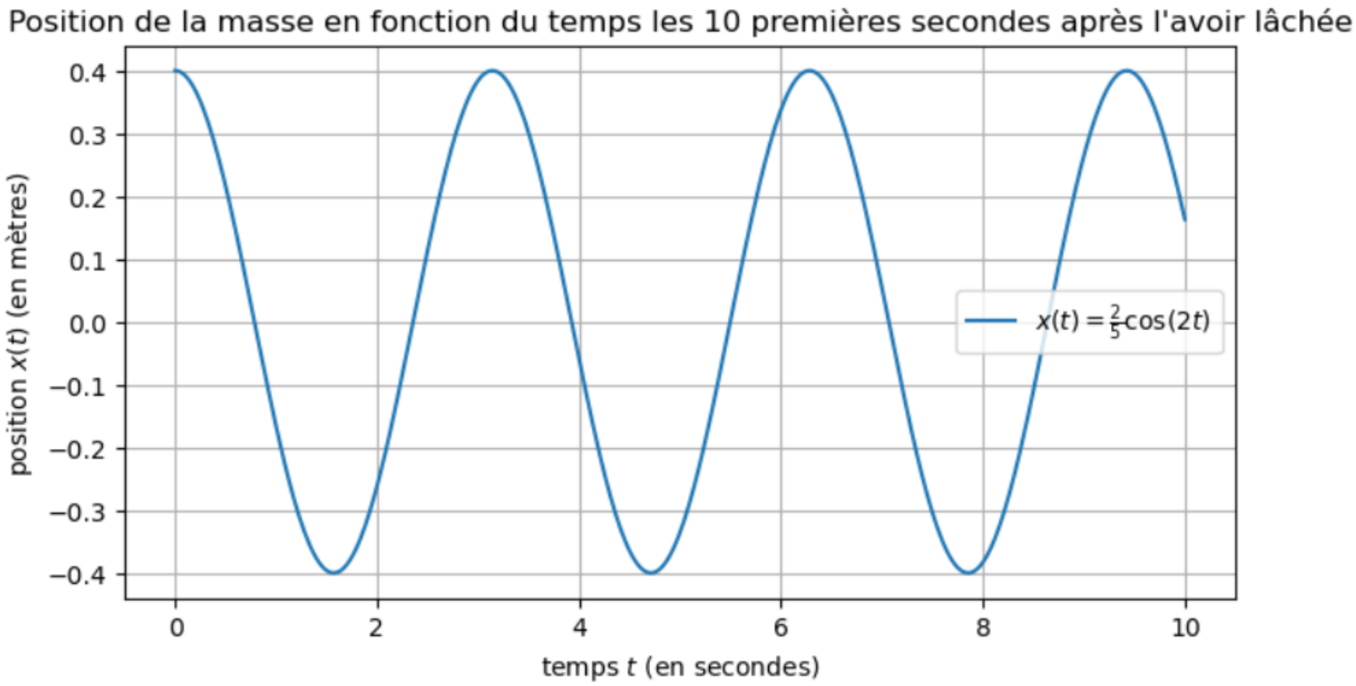
Il ne reste qu'à effectuer l'application numérique :

$$\begin{cases} m = 2\ kg \\ k = 8\ N/m \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{8\ N/m}{2\ kg}} \\
&= \sqrt{\frac{8}{2}\ \frac{N/m}{kg}} \\
&= \sqrt{4\ \frac{N/m}{kg}} \\
&= 2\sqrt{\frac{N/m}{kg}} \\
&= 2\sqrt{\frac{\frac{kg \times m/s^2}{m}}{kg}} \\
&= 2\sqrt{\frac{kg \times m}{m \times s^2 \times kg}}
\end{aligned}$$

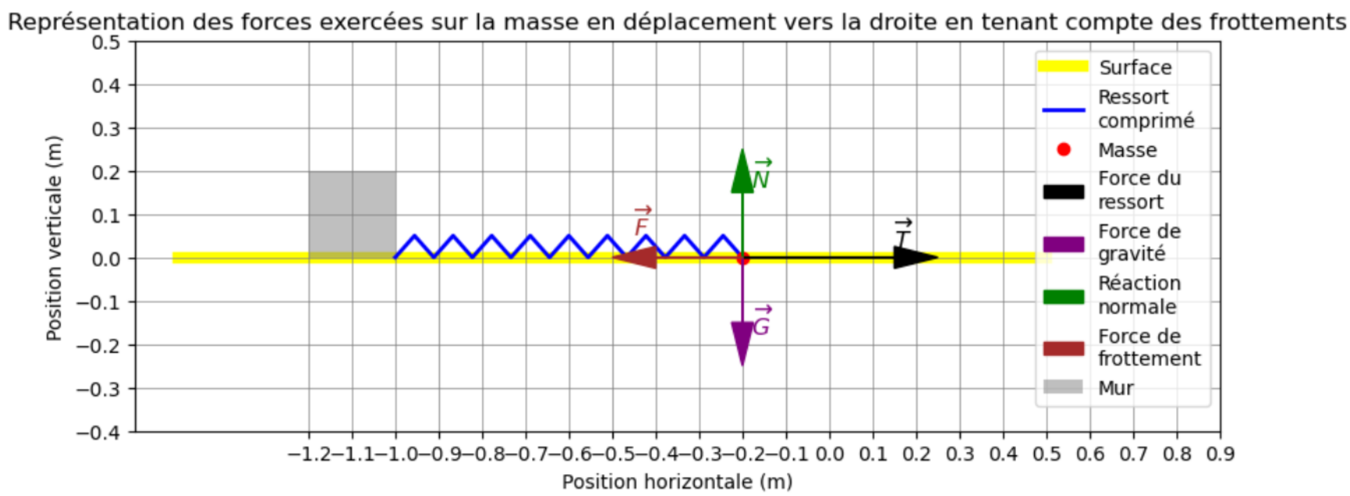
$$= 2\sqrt{s^{-2}}$$
$$= 2\, s^{-1}$$
$$= 2\, Hz$$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{5}\cos(2t)}$$



II. **Avec frottement :** *(Questions bonus)*

On ajoute maintenant une force de frottement notée $\vec{F}$.



On suppose que :

$$\vec{F}(t) = -a x'(t)\,\vec{i} \qquad \text{où } a \text{ est une constante positive}$$

1. Déterminer une équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
   Quand on applique la deuxième loi de Newton, on obtient cette fois :

$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) + \underbrace{\overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{N}(t)}_{= 0 \text{ car } \overrightarrow{N}(t) = -\overrightarrow{G}(t) \text{ d'après le troisième principe de Newton}} + \overrightarrow{F}(t)$$

$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) + \overrightarrow{F}(t)$$

$$m.x''(t) = -k.x(t) - a.x'(t)$$

$$m.x''(t) + a.x'(t) + k.x(t) = 0$$

$$x''(t) + \frac{a}{m}.x'(t) + \frac{k}{m}.x(t) = 0$$

   Donc $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$\boxed{y'' + \frac{a}{m}.y' + \frac{k}{m}.y = 0}$$

2. Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$ dans le cas où $a = 2\ kg/s$.
   On restreint l'étude maintenant à l'application numérique :

$$\boxed{x(t) \text{ est une solution de l'équation différentielle } y'' + y' + 4.y = 0 \text{ d'inconnue } y.}$$

   Cette équation est une équation différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On peut donc bien parler d'équation caractéristique associée. Son équation caractéristique associée est l'équation suivante d'inconnue x :

$$\boxed{x^2 + x + 4 = 0}$$

   Déterminons les solutions de l'équation caractéristique en commençant par calculer son discriminant :

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 = 1 - 16 = -15$$

   Les solutions de l'équation caractéristique sont les deux nombres complexes conjugués $-\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{15}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{15}}{2}$. Donc, d'après le cours sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, les solutions de $y'' + y' + 4.y = 0$ sont les fonctions de forme générale :

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles}}$$

   En définitive, comme $x(t)$ est une solution de cette équation, il existe deux réels A et B tels que :

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)}$$

   Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
   Pour ce faire, on utilise comme précédemment les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Remarque : La position $x(t)$ de la masse est la solution du problème de Cauchy d'inconnue y suivant :

$$\begin{cases} y'' + y' + 4.y = 0 \\ y(0) = 0,4 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour récapituler, on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \\ x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{cases}}$$

On détermine A et B :

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

$$x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(-A.\frac{\sqrt{15}}{2}.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + B.\frac{\sqrt{15}}{2}.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

$$x'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\left(-\frac{A}{2} + B.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \left(-\frac{B}{2} - A.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$$

$$x'(0) = 0$$

$$e^{-\frac{0}{2}}\left(\left(-\frac{A}{2} + B.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\times 0\right) + \left(-\frac{B}{2} - A.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\times 0\right)\right) = 0$$

$$e^{0}\left(\left(-\frac{A}{2} + B.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\cos(0) + \left(-\frac{B}{2} - A.\frac{\sqrt{15}}{2}\right).\sin(0)\right) = 0$$

$$1\times\left(\left(-\frac{A}{2} + B.\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\times 1 + \left(-\frac{B}{2} - A.\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\times 0\right) = 0$$

$$-\frac{A}{2} + B.\frac{\sqrt{15}}{2} = 0$$

$$\boxed{-A + B.\sqrt{15} = 0}$$

$$x(0) = \frac{2}{5}$$

$$e^{-\frac{0}{2}}\left(A.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\times 0\right) + B.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\times 0\right)\right) = \frac{2}{5}$$

$$e^{0}\left(A.\cos(0) + B.\sin(0)\right) = \frac{2}{5}$$

$$1\times(A\times 1 + B\times 0) = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{5}}$$

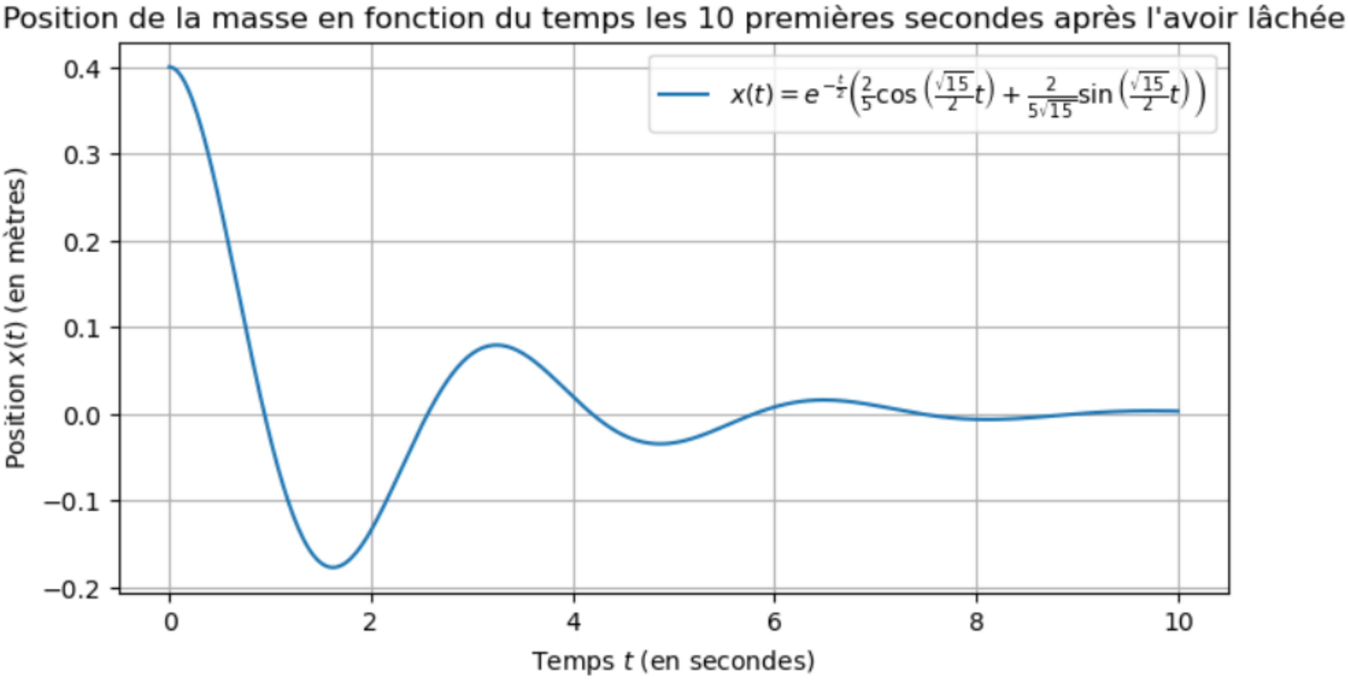
$$-A + B.\sqrt{15} = 0$$

$$B = \frac{A}{\sqrt{15}}$$

$$\boxed{B = \frac{2}{5\sqrt{15}}}$$

En définitive l'expression de la position $x(t)$ de la masse est :

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{2}{5}.\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{2}{5\sqrt{15}}.\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)}$$


Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée
$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{2}{5\sqrt{15}}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)$
Position $x(t)$ (en mètres)
Temps t (en secondes)
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.1
−0.2
0
2
4
6
8
10