CORRECTION DU SUJET DE TYPE TOMIC RÉDACTIONNEL SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

S. Labopin

Table des matières

1 Exercice 1

1.1 Énoncé

On note :

$$f(x,y) = 3x^2 - xy - y^2$$

1) Calculer sans calculatrice une valeur approchée de $f(1{,}01;2{,}98)$.
2) Calculer l'erreur relative d'interpolation de cette approximation du nombre $f(1{,}01;2{,}98)$.
3) *a*) En quel point de la représentation graphique de f l'approximation affine que l'on a déterminée précédemment permet-elle rapidement de déterminer une équation du plan tangent à cette représentation graphique ?
   b) Déterminer une équation du plan tangent à la représentation graphique de f en ce point.

1.2 Correction

1) On calcule sans calculatrice :

$$f(1;3) = -9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1;3) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1;3) = -7$$

On écrit l'approximation affine de f en $(1;3)$ quand $(h,k) \approx (0,0)$:

$$\begin{aligned} f(1+h,3+k) &\approx f(1;3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1;3)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(1;3)\cdot k \\ &\approx -9 + 3h - 7k \end{aligned}$$

On remarque que :

$$f(1{,}01;2{,}98) = f(1+h;3+k) \qquad \text{avec} \begin{cases} h = 10^{-2} \\ k = -2\cdot 10^{-2} \end{cases}$$

On en déduit un calcul d'une valeur approchée de $f(1{,}01;2{,}98)$ sans calculatrice :

$$\begin{aligned} f(1{,}01;2{,}98) &\approx -9 + 3\cdot 10^{-2} - 7\cdot\left(-2\cdot 10^{-2}\right) \\ &\approx -9 + 3\cdot 10^{-2} + 14\cdot 10^{-2} \\ &\approx -9 + 17\cdot 10^{-2} \\ &\approx -8{,}83 \end{aligned}$$

Donc $-8{,}83$ est une valeur approchée de $f(1{,}01;2{,}98)$.

2) On calcule avec une calculatrice la valeur exacte de $f(1{,}01;2{,}98)$:

```
Terminal
$ bc
bc 1.07.1
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006, 2008, 2012-2017 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
scale=9
3*1.01^2-1.01*2.98-2.98^2
-8.8299
```

On calcule avec une calculatrice l'erreur relative d'interpolation de cette approximation du nombre $f(1,01;2,98)$:

```
Terminal
$ bc
bc 1.07.1
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006, 2008, 2012-2017 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
scale=9
3*1.01^2-1.01*2.98-2.98^2
-8.8299
(-8.83-(-8.8299))/(-8.8299)
.000011325
scale=30
(-8.83-(-8.8299))/(-8.8299)
.000011325156570289584253502304
```

On n'obtient en fait très probablement qu'une approximation :

$$0{,}000\,011\,325\,156\,570\,289\,584\,253\,502\,304 \leq \left|\frac{-8{,}83-(-8.8299)}{-8.8299}\right| < 0{,}000\,011\,325\,156\,570\,289\,584\,253\,502\,305$$

Par exemple, la valeur approchée par défaut au milliardième de l'erreur relative d'interpolation de cette approximation du nombre $f(1,01;2,98)$ est $0{,}000\,011\,325$.

3) *a*) L'approximation affine que l'on a déterminée précédemment permet de rapidemment déterminer une équation du plan tangent à la représentation graphique de f au point $(1;3;-9)$.

b) L'approximation affine de f au point $(1;3)$ est :

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(1;3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1;3)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1;3)\cdot(y-3) \\ &\approx -9+3(x-1)-7(y-3) \end{aligned}$$

Donc l'équation suivante d'inconnue (x,y,z) est une équation du plan tangent à la représentation graphique de f au point $(1;3;-9)$:

$$z=-9+3(x-1)-7(y-3)$$

2 Exercice 2

2.1 Énoncé

Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est utilisée. Des études ont montré que la durée de l'infection en fonction du dosage en mg de ces deux composés chimiques pouvait être modélisée par la fonction D définie comme suit :

$$D(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$$

Déterminer comment minimiser la durée de l'infection.

2.2 Correction

On calcule les dérivées partielles premières de D :

$$\frac{\partial D}{\partial x}(x,y) = 2x - 18 + 2y$$

$$\frac{\partial D}{\partial y}(x,y) = 4y - 24 + 2x$$

On détermine les points critiques de D :

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } D &\iff \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 18 + 2y = 0 \\ 4y - 24 + 2x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 9 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 9 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{(via } L_2 \leftarrow L_2 - L_1\text{)} \\
&\iff \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc l'unique point critique de D est $(6;3)$ (⚠Cela ne veut pas dire que $D(6;3)$ est un extremum local de D !).

On détermine la nature du point critique $(6;3)$:
On utilise les notations de Monge « $r,\ s,\ t$ » (relativement au point $(6;3)$).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(x,y) = 2 &\qquad \text{donc} \qquad r = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(6;3) = 2 \\
\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 &\qquad \text{donc} \qquad s = \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(6;3) = 2 \\
\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(x,y) = 4 &\qquad \text{donc} \qquad t = \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(6;3) = 4
\end{aligned}$$

On a :

$$s^2 - rt = 2^2 - 2 \times 4 = -4 < 0$$

Donc D atteint un extremum local $(6;3)$.
On a de plus :

$$r = 2 > 0$$

Donc D atteint un minimum local $(6;3)$.
En définitive, pour minimiser la durée de l'infection, il faut prendre 6 mg du premier composé et 3 mg du deuxième composé.

3 Exercice bonus

3.1 Énoncé

Soient ϕ et ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On considère le problème de Cauchy suivant d'inconnue f :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f(x,0) = \phi(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \psi(x) \end{array}\right.$$

1) Résoude ce problème de Cauchy en utilisant le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x + y \\ v = y \\ f\left(x,y\right) = g(u,v) \end{array}\right.$$

2) En déduire les solutions de ce problème de Cauchy dans les cas particuliers suivants :
   a) $\phi(x) = \psi(x) = 1$
   b) $\phi(x) = x^2$ et $\psi(x) = 0$

3.2 Correction

1) On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 du changement de variables :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

On calcule une expression des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en fonction de celles de g en appliquant la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

On effectue le changement de variables dans l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\iff \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial g}{\partial u} - \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = 0 \\ &\iff \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0\end{aligned}$$

On intègre par rapport à v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v} - g\right) = 0 \\ &\iff \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - g(u,v) = C_1(u) \qquad \text{avec } C_1 \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\iff$ Pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction partielle $v \mapsto g(u,v)$ est solution de l'équation suivante d'inconnue h :

$$h'(v) + h(v) = C_1(u)$$

$$\iff g(u,v) = -C_1(u) + C_2(u)\cdot e^v \qquad \text{avec } C_2 \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

En définitive :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 &\iff g(u,v)=-C_1(u)+C_2(u)\cdot e^v \quad \text{avec } C_1, C_2 \text{ deux fonctions de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}\\ &\iff f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\end{aligned}$$

On exploite les conditions initiales :

$$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0\\ f(x,0)=\phi(x)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\psi(x)\end{cases} &\iff \begin{cases} f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\\ f(x,0)=\phi(x)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\psi(x)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\\ -C_1(x)+C_2(x)=\phi(x)\\ -C_1'(x)+C_2'(x)+C_2(x)=\psi(x)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\\ -C_1(x)+C_2(x)=\phi(x)\\ \phi'(x)+C_2(x)=\psi(x)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\\ -C_1(x)+C_2(x)=\phi(x)\\ \phi'(x)+C_1(x)=-\phi(x)+\psi(x)\end{cases} \qquad (\text{via } L_3\leftarrow L_3-L_2)\\
&\iff \begin{cases} f(x,y)=-C_1(x+y)+C_2(x+y)\cdot e^y\\ C_2(x)=\psi(x)-\phi'(x)\\ C_1(x)=-\phi(x)+\psi(x)-\phi'(x)\end{cases}\\
&\iff f(x,y)=-\left(-\phi(x+y)+\psi(x+y)-\phi'(x+y)\right)+\left(\psi(x+y)-\phi'(x+y)\right)\cdot e^y\\
&\iff f(x,y)=\phi(x+y)-\psi(x+y)+\phi'(x+y)+\left(\psi(x+y)-\phi'(x+y)\right)\cdot e^y\end{aligned}$$

Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction f définie comme suit :

$$f(x,y)=\phi(x+y)-\psi(x+y)+\phi'(x+y)+\left(\psi(x+y)-\phi'(x+y)\right)\cdot e^y$$

2) *a*) Si $\phi(x)=\psi(x)=1$, alors dans ce cas on a :

$$f(x,y)=e^y$$

b) Si $\phi(x)=x^2$ et $\psi(x)=0$, alors dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(x+y)^2-0+2(x+y)+\left(0-2(x+y)\right)\cdot e^y\\ &=(x+y)\left(x+y+2-2e^y\right)\end{aligned}$$