CORRECTION DU SUJET DE TYPE TOMIC RÉDACTIONNEL SUR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

S. Labopin

Table des matières

1 Exercice 1

1.1 Énoncé

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^+$. Pour chacune de ces fonctions, déterminer sa transformée de Laplace.

- $f(x) = 7e^{-x}$
- $h(x) = \left(2-x^2\right)^2 e^x$

1.2 Correction

1) • Si $f(x) = 7e^{-x}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}(f(t))\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt} 7e^{-t}\,dt \\
&= 7\int_0^{+\infty} e^{(-1-p)t}\,dt \\
&= 7\left[\frac{e^{(-1-p)t}}{1-p}\right]_0^{+\infty} \\
&= 7\left(\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{(-1-p)t}}{-1-p}\right) - \frac{e^{(-1-p)\times 0}}{-1-p}\right) \\
&= 7\left(0-\frac{1}{-1-p}\right) && (\text{⚠La transformée de Laplace est définie sur }]1;+\infty[) \\
&= \frac{7}{p+1}
\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu aussi appliquer la linéarité de la transformation de Laplace et la formule du cours « $\left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](p) = \frac{1}{p-\alpha}$ » :

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}(f(t))\right](p) &= \left[\mathscr{L}\left(7e^{-t}\right)\right](p) \\
&= 7\left[\mathscr{L}\left(e^{-t}\right)\right](p) && (\text{via la linéarité de la transformation de Laplace}) \\
&= 7\cdot\frac{1}{p+1} && \left(\text{via la formule du cours « } \left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](p) = \frac{1}{p-\alpha} \text{ » pour } \alpha=-1\right) \\
&= \frac{7}{p+1}
\end{aligned}$$

• On note $h(x) = \left(2-x^2\right)^2 e^x$.
Pour ce calcul, si l'on ne connait pas son cours, plusieurs intégrations par partie font perdre beaucoup de temps.
On apprend donc les formules du cours et on les applique :

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}(h(t))\right](p() &= \left[\mathscr{L}\left(\left(2-t^2\right)^2 e^t\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\left(4-4t^2+t^4\right)e^t\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(4e^t-4t^2e^t+t^4e^t\right)\right](p) \\
&= 4\left[\mathscr{L}\left(e^t\right)\right](p) - 4\left[\mathscr{L}\left(t^2e^t\right)\right](p) + \left[\mathscr{L}\left(t^4e^t\right)\right](p) && (\text{via la linéarité de la transformation de Laplace}) \\
&= \frac{4}{p-1} - 4\left[\mathscr{L}\left(t^2e^t\right)\right](p) + \left[\mathscr{L}\left(t^4e^t\right)\right](p) && \left(\text{via la formule du cours « } \left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](p) = \frac{1}{p-\alpha} \text{ » pour } \alpha=1\right) \\
&= \frac{4}{p-1} - 4\left[\mathscr{L}\left(t^2\right)\right](p-1) + \left[\mathscr{L}\left(t^4e^t\right)\right](p) && \left(\text{via la propriété d'amortissement « } \left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}g(t)\right)\right](p) = \left[\mathscr{L}(g(t))\right](p-\alpha) \text{ » pour } \alpha=1 \text{ et } g(t)=t^2\right) \\
&= \frac{4}{p-1} - 4\left[\mathscr{L}\left(t^2\right)\right](p-1) + \left[\mathscr{L}\left(t^4\right)\right](p-1) && \left(\text{via la propriété d'amortissement « } \left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}g(t)\right)\right](p) = \left[\mathscr{L}(g(t))\right](p-\alpha) \text{ » pour } \alpha=1 \text{ et } g(t)=t^4\right) \\
&= \frac{4}{p-1} - 4\cdot\frac{2!}{(p-1)^3} + \left[\mathscr{L}\left(t^4\right)\right](p-1) && \left(\text{via la formule « } \left[\mathscr{L}\left(t^n\right)\right](p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ » pour } n=2 \text{ et « } p-1 \text{ à la place de } p \text{ »}\right) \\
&= \frac{4}{p-1} - 4\cdot\frac{2!}{(p-1)^3} + \frac{4!}{(p-1)^5} && \left(\text{via la formule « } \left[\mathscr{L}\left(t^n\right)\right](p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ » pour } n=4 \text{ et « } p-1 \text{ à la place de } p \text{ »}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{p-1} - \frac{8}{\left(p-1\right)^3} + \frac{24}{\left(p-1\right)^5}$$

(En prime, cette fraction rationnelle est déjà décomposée en éléments simples.)

2 Exercice 2

2.1 Énoncé

On récupère un circuit électrique et, pour déterminer sa dynamique, on excite ce système en le soumettant à une entrée en échelon unité. Autrement dit, on le soumet à une tension de 1 V à partir de l'instant $t = 0$.
On mesure alors la tension en sortie et on constate que la réponse $s(t)$ du système à cette excitation est données par la formule suivante :

$$s(t) = \left(\frac{1}{3}e^{\frac{-4t}{T}} + \frac{t}{3T}e^{\frac{-4t}{T}} - \frac{1}{3}\right)\cdot\mathscr{U}(t) \qquad \text{où on a noté la fonction échelon unité de Heaviside } \mathscr{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ de ce système en calculant le rapport de la tranformée de Laplace de la sortie par la tranformée de Laplace de l'entrée.
2) On admet que :

   La **réponse impulsionnelle** est l'original de la fonction de transfert.

   Déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce circuit électrique.

2.2 Correction

1) Quand on excite le système avec l'excitation $\mathscr{U}(t)$, alors la réponse du système est $s(t) = \left(\frac{1}{3}e^{\frac{-4t}{T}} + \frac{t}{3T}e^{\frac{-4t}{T}} - \frac{1}{3}\right)\cdot\mathscr{U}(t)$.
   Donc la fonction de transfert $H(p)$ de ce système vérifie par définition l'égalité suivante :

$$[\mathscr{L}(s(t))](p) = H(p)\cdot[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)$$

   Donc la fonction de transfert $H(p)$ de ce système est bien comme le suggère l'énoncé le rapport de la tranformée de Laplace de sortie $s(t)$ par la tranformée de Laplace de la l'entrée $\mathscr{U}(t)$:

$$H(p) = \frac{[\mathscr{L}(s(t))](p)}{[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)}$$

   On calcule d'abord séparément les transformées de Laplace de l'entrée et de la réponse :

$$[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) = \frac{1}{p} \qquad \text{(d'après une formule du cours)}$$

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}(s(t))](p) &= \left[\mathscr{L}\left(\left(\frac{1}{3}e^{\frac{-4t}{T}} + \frac{t}{3T}e^{\frac{-4t}{T}} - \frac{1}{3}\right)\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t) + \frac{t}{3T}e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t) - \frac{1}{3}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathscr{L}\left(e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) + \frac{1}{3T}\left[\mathscr{L}\left(t\cdot e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) - \frac{1}{3}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) && \text{(via la linéarité de la transformation de Laplace)} \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathscr{L}\left(e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) + \frac{1}{3T}[\mathscr{L}(t\cdot\mathscr{U}(t))]\left(p+\frac{4}{T}\right) - \frac{1}{3}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) && \text{(via la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace)} \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathscr{L}\left(e^{\frac{-4t}{T}}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) + \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} - \frac{1}{3}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) && \text{(via la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace)} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+\frac{4}{T}} + \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p} && \text{(via la formule « } \left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}\cdot\mathscr{U}(t)\right)\right](p) = \tfrac{1}{p-\alpha} \text{ » pour } \alpha = \tfrac{-4}{T} \text{ et } \alpha = 0)
\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
H(p) &= \frac{[\mathscr{L}(s(t))](p)}{[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+\frac{4}{T}} + \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+\frac{4}{T}} + \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}\right)\cdot p && \text{(Diviser par } \tfrac{1}{p}\text{, c'est multiplier par } p\text{!)} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p+\frac{4}{T}} + \frac{1}{3T}\cdot\frac{p}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3T} \cdot \frac{Tp\left(p+\frac{4}{T}\right)+p-T\left(p+\frac{4}{T}\right)^2}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3T} \cdot \frac{Tp^2+4p+p-Tp^2-8p-\frac{16}{T}}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3T} \cdot \frac{-3p-\frac{16}{T}}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\boxed{H(p) = \frac{-1}{3T^2} \cdot \frac{3Tp+16}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2}}$$

2) La réponse impulsionnelle $h(t)$ est d'après l'énoncé l'original de la fonction de transfert $H(p)$.
Afin de déterminer plus facilement cet original, on commence par décomposer $H(p)$ en élements simples.
D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on a :

$$\frac{3Tp+16}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} = \frac{a}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} + \frac{b}{p+\frac{4}{T}}$$

La méthode du cache permet de déterminer le coefficient a car le dénominateur correspondant est une puissance maximale d'un facteur irréductible dans cette décomposition :

$$a = \left.\frac{3Tp+16}{\text{[redacted]} \times 1}\right|_{p=\frac{-4}{T}} = \frac{3T \times \left(\frac{-4}{T}\right)+16}{1} = 4$$

On cache « $\left(p+\frac{4}{T}\right)^2$ »

L'autre coefficient b ne peut pas être déterminé avec la méthode du cache car le dénominateur correspondant ne comporte pas une puissance maximale d'un facteur irréductible dans cette décomposition.
Pour déterminer b, on peut par exemple multiplier par p chaque membre de l'égalité « $\frac{3Tp+16}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} = \frac{a}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} + \frac{b}{p+\frac{4}{T}}$ » puis faire tendre p vers $+\infty$. On obtient ainsi :

$$
\begin{aligned}
3T &= 0+b \\
b &= 3T
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$H(p) = \frac{-1}{3T^2} \cdot \left(\frac{4}{\left(p+\frac{4}{T}\right)^2} + \frac{3T}{p+\frac{4}{T}}\right)$$

Il découle :

$$
\begin{aligned}
H(p) &= \frac{-1}{3T^2} \cdot \left(4 \cdot [\mathscr{L}(t \cdot \mathscr{U}(t))]\left(p+\frac{4}{T}\right) + 3T \cdot \left[\mathscr{L}\left(e^{\frac{-4t}{T}} \cdot \mathscr{U}\right)\right](p)\right) \\
&= \frac{-1}{3T^2} \cdot \left(4 \cdot \left[\mathscr{L}\left(t \cdot e^{\frac{-4t}{T}} \cdot \mathscr{U}(t)\right)\right](p) + 3T \cdot \left[\mathscr{L}\left(e^{\frac{-4t}{T}} \cdot \mathscr{U}\right)\right](p)\right) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\frac{-4t}{3T^2} \cdot e^{\frac{-4t}{T}} \cdot \mathscr{U}(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{\frac{-4t}{T}} \cdot \mathscr{U}(t)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\left(\frac{-4t}{3T^2} - \frac{1}{T}\right) \cdot e^{\frac{-4t}{T}} \mathscr{U}(t)\right)\right](p)
\end{aligned}
$$

On obtient en définitive une expression de la réponse impulsionnelle :

$$\boxed{h(t) = \left(\frac{-4t}{3T^2} - \frac{1}{T}\right) \cdot e^{\frac{-4t}{T}} \mathscr{U}(t)}$$

3 Exercice bonus

3.1 Énoncé

On reprend le circuit électrique de l'exercice 2.
Comme expliqué précédemment, la modélisation rigoureuse de l'impulsion idéale, c'est-à-dire d'amplitude infinie pendant une durée infiniment courte et apportant au système une quantité d'énergie unitaire, n'est pas modélisable avec une fonction mais avec ce qu'on appelle une distribution (voir initiation à la théorie de distributions après la fin de cette épreuve).
Dans cet exercice, on modélise tout de même de façon approximative cette impulsion idéale avec la tension d'entrée $i_{\mathscr{E}}(t)$ de **valeur $\frac{1}{\mathscr{E}}$ très grande**, **pendant une durée $\mathscr{E}$ très courte** (à partir de l'instant $t = 0$) et **d'intégrale 1** (pour apporter au système une quantité d'énergie unitaire) définie par :

$$i_{\mathscr{E}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mathscr{E}} & \text{si } t \in [0;\mathscr{E}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } \mathscr{E} \text{ un réel stritement positif « \textbf{très petit} » } \left(\frac{1}{\mathscr{E}} \text{ est donc « \textbf{très grand} »}\right)$$

1) Tracer la courbe de la fonction $i_{\mathscr{E}}$ et vérifier qu'une telle approximation de l'impulsion idéale apporte tout de même au système une quantité d'énergie unitaire en démontrant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i_{\mathscr{E}}(t)\,dt = 1$$

2) Calculer la transformée de Laplace $[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))]\left(p\right)$ de $i_{\mathscr{E}}(t)$.
3) Soit $p > 0$.
En reconnaissant le taux d'accroissement en 0 de la fonction exponentielle, démontrer que :

$$[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))]\left(p\right) \underset{\mathscr{E}\to 0}{\to} \mathscr{U}\left(p\right)$$

4) Compléter le « raisonnement » (heuristique et non mathématique) et la conjecture qui en découle suivants :
L'impulsion $i_{\mathscr{E}}(t)$ est une approximation de l'impulsion idéale quand $\mathscr{E}$ est proche de **.....**.
D'après la question 3), la transformée de Laplace $[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))]\left(p\right)$ de cette approximation de l'impulsion idéale est une approximation de la fonction **.....**.
Donc, il semble pertinent de généraliser la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ avec un ensemble de définition encore plus grand que l'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle qui comprend une modélisation δ_0 de l'impulsion idéale tel que :

$$\mathscr{L}(\delta_0) = \textbf{.....}$$

Cette dernière égalité traduirait le fait que l'impulsion idéale est l'original de **.....**.
On note H et h respectivement la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.
Comme la réponse impulsionnelle $h(t)$ est la réponse à l'impulsion idéale, on aurait :

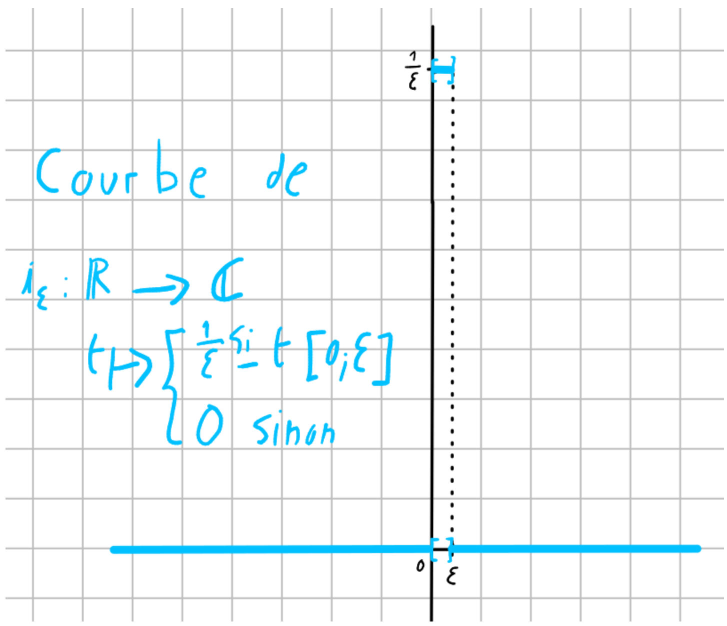
$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(\textbf{.....})]\left(p\right) &= H\left(p\right) \times [\mathscr{L}(\delta_0)]\left(p\right) \\ &= H\left(p\right) \times \textbf{.....}\end{aligned}$$

$$\textit{Pour } p \textit{ assez grand, } [\mathscr{L}(h(t))]\left(p\right) = \textbf{.....}$$

On est donc naturellement amené à conjecturer que la réponse impulsionnelle $h(t)$ est **.....**.

3.2 Correction

1) On trace la courbe de la fonction $i_{\mathscr{E}}$:



On calcule la quantité d'énergie apportée au système avec une telle impulsion :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} i_{\mathscr{E}}(t)\,dt &= \int_0^{\mathscr{E}} \frac{1}{\mathscr{E}}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{\mathscr{E}}\right]_0^{\mathscr{E}} \\ &= \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}} - \frac{0}{\mathscr{E}} \\ &= 1\end{aligned}$$

2) On calcule la transformée de Laplace $[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))](p)$ de $i_{\mathscr{E}}(t)$:

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} i_{\mathscr{E}}(t)\,dt \\ &= \int_0^{\mathscr{E}} e^{-pt}\cdot\frac{1}{\mathscr{E}}\,dt \\ &= \frac{1}{\mathscr{E}}\cdot\int_0^{\mathscr{E}} e^{-pt}\,dt \\ &= \frac{1}{\mathscr{E}}\cdot\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\mathscr{E}} \\ &= \frac{1}{\mathscr{E}p}\left(1-e^{-\mathscr{E}p}\right)\end{aligned}$$

3) Soit $p > 0$.

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))](p) &= \frac{1}{\mathscr{E}p}\left(1-e^{-\mathscr{E}p}\right) \\ &= \frac{e^{-\mathscr{E}p} - e^{-\mathscr{E}\times 0}}{(-\mathscr{E}p)-0} && \text{(On reconnaît le taux d'accroissement de exp en 0 appliqué en } -\mathscr{E}p.) \\ &\underset{\mathscr{E}\to 0}{\to} \exp'(0) && \text{(Comme exp est dérivable en 0, sont taux d'accroissement en 0 admet une limite finie en 0 qui est par définition le nombre dérivé de exp en 0.)} \\ &\underset{\mathscr{E}\to 0}{\to} 1 \\ &\underset{\mathscr{E}\to 0}{\to} \mathscr{U}(p) && (\text{car } p \geq 0)\end{aligned}$$

4) *L'impulsion $i_{\mathscr{E}}(t)$ est une approximation de l'impulsion idéale quand $\mathscr{E}$ est proche de* **0**.

D'après la question 3), la transformée de Laplace $[\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}}(t))](p)$ de cette approximation de l'impulsion idéale est une approximation de la fonction ***échelon unité de Heaviside $\mathscr{U}$***.

Donc, il semble pertinent de généraliser la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ avec un ensemble de définition encore plus grand que l'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle qui comprend une modélisation δ_0 de l'impulsion idéale tel que :

$$\mathscr{L}(\delta_0) = \mathscr{U}$$

Cette dernière égalité traduirait le fait que l'impulsion idéale est l'original de ***la fonction échelon unité de Heaviside $\mathscr{U}$***.

On note H et h respectivement la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.

Comme la réponse impulsionnelle $h(t)$ est la réponse à l'impulsion idéale, on aurait :

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(\boldsymbol{h(t)})](p) &= H(p)\times[\mathscr{L}(\delta_0)](p) \\ &= H(p)\times\boldsymbol{\mathscr{U}(p)}\end{aligned}$$

Pour p assez grand, $[\mathscr{L}(h(t))](p) = \boldsymbol{H(p)}$

On est donc naturellement amené à conjecturer que la réponse impulsionnelle $h(t)$ est ***l'original de la fonction de transfert***.

4 Petite initiation à la théorie des distributions pour comprendre la modélisation de l'impulsion idéale, l'utilité de la réponse impulsionnelle et pourquoi cette dernière est l'original de la fonction de transfert

4.1 Généralisation des fonctions par les distributions

Définition-notation (espace $\mathscr{D}$ des fonctions test)

- On note $\boldsymbol{\mathscr{D}}$ et on appelle **espace des fonctions test** l'ensemble de fonctions suivant :

$$\underbrace{\mathscr{D} = \left\{\phi \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;|\; \phi \text{ indéfiniment dérivable et nul à l'extérieur d'un segment}\right\}}_{\mathscr{D} \text{ est l'ensemble de toutes les fonctions définies sur } \mathbb{R}\text{, à valeurs dans } \mathbb{C}\text{, indéfiniment dérivables et nulles à l'extérieur d'un segment}}$$

  Autrement dit :

$$\mathscr{D} = \left\{\phi \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;|\; \phi \text{ indéfiniment dérivable et } \exists\, a, b \in \mathbb{R} \;|\; \forall\; t \notin [a,b]\,,\; \phi(t) = 0\right\}$$

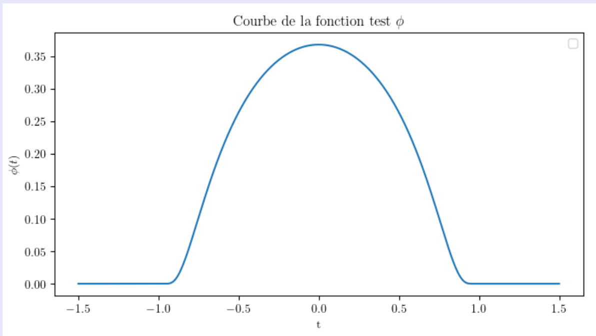
- On dit que ϕ est **une fonction test** lorsque $\phi \in \mathscr{D}$.
  Autrement dit :

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ est une fonction test } \iff \begin{cases} \phi \text{ est indéfiniment dérivable} \\ \exists\, a, b \in \mathbb{R} \;|\; \forall\; t \notin [a,b]\,,\; \phi(t) = 0 \end{cases}$$

Exemple (fonction test)

La fonction ϕ suivante est une fonction test :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right) & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases} \end{array}$$



Définition (distribution)
On dit que d est une **distribution** lorsque les trois points suivants sont vérifiés :

- d est une application qui, à chaque fonction $\phi \in \mathscr{D}$, associe un nombre complexe.
  Autrement dit : $\boldsymbol{d \,:\, \mathscr{D} \to \mathbb{C}}$
- $\forall\; (a,b) \in \mathbb{C},\; \forall\; (\phi, \psi) \in \mathscr{D},\; d\left(a\phi + b\psi\right) = a \cdot d\left(\phi\right) + b \cdot d\left(\psi\right)$
  Autrement dit : d est **linéaire**.
- d est **continue** sur $\mathscr{D}$ pour la topologie de Frechet usuelle de l'espace des fonctions test.

⚠La continuité sur $\mathscr{D}$ pour la topologie de Frechet usuelle de l'espace des fonctions test est une notion très difficile à saisir. On admet pour cette modeste initiation que les applications définies dans les deux blocs suivants « Théorème-exemple (distribution de Dirac en 0) » et « Théorème-exemple (distribution associée à une fonction) » sont effectivement continues sur $\mathscr{D}$ pour la topologie de Frechet usuelle de l'espace des fonctions test.

Théorème-exemple (distribution de Dirac en 0)
L'application $\boldsymbol{\delta_0}$ suivante **est une distribution appelée distribution de Dirac en 0** :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\delta_0} : & \boldsymbol{\mathscr{D}} & \boldsymbol{\to} & \boldsymbol{\mathbb{C}} \\ & \boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{\mapsto} & \boldsymbol{\phi(0)} \end{array}}$$

Théorème-exemple (distribution associée à une fonction)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Alors l'application $\left[f\right]$ suivante **est une distribution appelée distribution associée à la fonction $\boldsymbol{f}$** :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} [f] : & \boldsymbol{\mathscr{D}} & \boldsymbol{\to} & \boldsymbol{\mathbb{C}} \\ & \boldsymbol{\phi} & \boldsymbol{\mapsto} & \boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, f(t)\, dt} \end{array}}$$

Abus de notation (On confond une fonction avec sa distribution associée)
On utilise souvent l'abus de notation suivant :

$$[f] = f$$

Et on dit même parfois qu'une distribution d est une fonction quand il existe une fonction f telle que $d = [f]$.

Notation (image d'une fonction test par une distribution)
Soit d une distribution et ϕ une fonction test.
On utilise souvent la notation suivante :

$$[f](\phi) = \langle [f] \mid \phi \rangle$$

Exemples (calcul de l'image d'une fonction test par une distribution avec des notations abusives)
On note $\phi(t) = \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)(\mathscr{U}(t+1) - \mathscr{U}(t-1))$.
D'après « Exemple (fonction test) », ϕ est une fonction test et on peut calculer son image par quelques distributions :

$$\langle \delta_0 \mid \phi \rangle = \delta_0(\phi) = \phi(0) = e^{-1}$$

$$\langle \mathscr{U} \mid \phi \rangle = \langle [\mathscr{U}] \mid \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\mathscr{U}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)dt$$

$$\left\langle \frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2} \mid \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)(\mathscr{U}(t+1) - \mathscr{U}(t-1)) \right\rangle = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)\frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt = \left[\exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)\right]_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$$

4.2 Généralisation de la transformation de Laplace et de la dérivation

Définition (transformation de Laplace d'une distribution)
Soit d une distribution.
On appelle **transformée de Laplace de la distribution d** la distribution **notée $\mathscr{L}(d)$** définie comme suit :

$$\forall\, \phi \in \mathscr{D},\ \langle \mathscr{L}(d) \mid \phi \rangle = \langle d \mid \mathscr{L}(\phi) \rangle$$

Remarque (**Généralisation de la transformation de Laplace et généralisation de la notion de fonction**)

- En notant $\mathscr{L}$ la transformation de Laplace avec l'ancienne définition et $\mathscr{L}$ celle avec la nouvelle définition, on a (avec l'abus de notation « $[f] = f$ ») :

$$\boxed{\text{Pour toute fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue par morceaux, } \underbrace{\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}([f])}_{\text{abus de notation}} = \underbrace{[\mathscr{L}(f)] = \mathscr{L}(f)}_{\text{abus de notation}}}$$

  Autrement dit : La transformée de Laplace de la distribution associée à une fonction est la distribution associée à la transformée de Laplace de cette fonction.
  Démonstration :
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{L}([f]) \mid \phi \rangle &= \langle [f] \mid \mathscr{L}(\phi) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathscr{L}(\phi)](p) f(p)\, dp \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} \phi(t)\, dt \right) f(p)\, dp \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(p)\, dp \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) (\mathscr{L}(f))(t)\, dt \\
&= \langle [\mathscr{L}(f)] \mid \phi \rangle \quad \square
\end{aligned}$$

  Cette généralisation de la transformation de Laplace coïncide donc bien avec avec l'ancienne définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.

- C'est pourquoi, les deux abus de notations suivants ni ne prêtent à confusion ni ne génèrent d'erreur quand on calcule la transformée de Laplace d'une combinaison linéaire de fonctions (« $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ ») :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L} \qquad\qquad\qquad [f] = f$$

  Lorsqu'on lit « f », le contexte indique clairement si cette expression désigne la fonction f ou bien sa distribution associée $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi f$.
  Lorsqu'on lit « $\mathscr{L}(f)$ », si le contexte indique que cette expression désigne une distribution, alors il s'agit en toute rigueur de « $\mathscr{L}([f])$ » .

- La démonstration précédente montre que cette généralisation de la transformation de Laplace aux distributions permet aussi de définir la transformée de Laplace de fonctions (ou plus précisément de distributions associées à une fonction) qui ne sont pas nécessairement à croissance au plus exponentielle. Cela élargit considérablement le champ d'application de la transformation de Laplace au-delà des fonctions traditionnellement considérées.
  Les distributions généralisent en fait aussi les fonctions et peuvent modéliser des phénomènes comme des impulsions (distributions de Dirac) et des croissances super-exponentielles.
  Par exemple, bien que la fonction $f(t) = e^{t^2}$ ne soit pas à croissance au plus exponentielle (On dit qu'elle est super-exponentielle.), on peut maintenant définir sa tranformée de Laplace $\mathscr{L}(f)$ par la distribution définie comme suit :

$$\forall\, \phi \in \mathscr{D},\ \langle \mathscr{L}(f) \mid \phi \rangle = \langle \mathscr{L}([f]) \mid \phi \rangle = \langle [f] \mid \mathscr{L}(\phi) \rangle$$

  En fait, quand on écrit ici f, on désigne sa distribution $[f]$ associée.

- On aimerait aussi naturellement continuer de faire l'amalgame entre fonction et distribution associée à une fonction sans faire d'erreur lorsqu'il y a des dérivations. Pour ce faire, on va définir la dérivée d'une distribution tel que « $[f]' = [f']$ » si f est dérivable.
  Il s'agit donc de définir la dérivée d'une distribution de manière à ce que si la distribution est associée à une fonction dérivable, alors la dérivée de cette distribution coïncide avec la distribution associée à la dérivée de cette fonction. Cette notion est définie ci-dessous.

Définition (Dérivée d'une distribution)
Soit d une distribution.
On appelle **dérivée de la distribution d** la distribution **notée d'** définie comme suit :

$$\forall\, \phi \in \mathscr{D},\ \langle d' \mid \phi \rangle = -\langle d \mid \phi' \rangle$$

Remarque (« Définition de la dérivée d'une fonction continue par morceaux non dérivable! »)

- **On vient de construire un cadre plus général dans lequel toutes les fonctions continues par morceaux sont dérivables!**
  On calcule par exemple ci-dessous la dérivée de la fonction valeur absolue!

$$
\begin{aligned}
\forall \phi \in \mathscr{D},\ \left\langle \frac{d\,|t|}{dt} \mid \phi \right\rangle &= \left\langle [t \mapsto |t|]' \mid \phi \right\rangle \\
&= -\left\langle |t| \mid \phi' \right\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t)\,|t|\,dt \\
&= -\left(\int_{-\infty}^{0} \phi'(t)\,|t|\,dt + \int_{0}^{+\infty} \phi'(t)\,|t|\,dt \right) \\
&= -\left(-\int_{-\infty}^{0} \phi'(t)\,t\,dt + \int_{0}^{+\infty} \phi'(t)\,t\,dt \right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \phi'(t)\,t\,dt - \int_{0}^{+\infty} \phi'(t)\,t\,dt \\
&= \left[\phi(t)\,t\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt - \left(\left[\phi(t)\,t\right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \phi(t)\,dt \right) \qquad \text{(via deux IPP)} \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)\,dt \qquad \text{(car } \phi \text{ nul au voisinage de } \pm\infty\text{)} \\
&= \int_{0}^{+\infty} \phi(t)\,(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(-t))\,dt \\
&= \left\langle [\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(-t)] \mid \phi \right\rangle
\end{aligned}
$$

  Donc la dérivée de la distribution associée à la valeur absolue est la distribution associée à la fonction signe $\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(-t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 1 \\ -1 & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$.

- On vérifie par le calcul suivant que l'on a bien $[f]' = [f']$ quand f est dérivable (au sens usuel et pas seulement au sens des distributions) :
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

$$
\begin{aligned}
\forall \phi \in \mathscr{D},\ \left\langle [f]' \mid \phi \right\rangle &= -\left\langle [f] \mid \phi' \right\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t)\,f(t)\,dt \\
&= -\left[\phi(t)\,f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,f'(t)\,dt \qquad \text{(via une IPP)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,f'(t)\,dt \qquad \text{(car } \phi \text{ nul au voisinage de } \pm\infty\text{)} \\
&= \left\langle [f'] \mid \phi \right\rangle
\end{aligned}
$$

4.3 Modélisation de l'impulsion idéale et de la réponse impulsionnelle

Pour rechercher une modélisation de l'impulsion idéale (amplitude infinie, pendant une durée infiniment courte à partir de l'instant $t = 0$ et apportant au système une quantité d'énergie unitaire), on reprend l'approximation de l'exercice bonus :

$$
i_{\mathscr{E}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mathscr{E}} & \text{si } t \in [0;\mathscr{E}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

Dans l'exercice bonus, on s'est intéressé à ce vers quoi la transformée de Laplace $\mathscr{L}(i_{\mathscr{E}})$ se rapproche quand $\mathscr{E}$ se rapproche de 0 pour en déduire une modélisation de la transformée de Laplace de l'impulsion idéale mais on ne pouvait pas s'intéresser à ce vers quoi se rapproche $i_{\mathscr{E}}$ quand $\mathscr{E}$ se rapproche de 0 car on ne se rapproche pas d'un objet que l'on peut modéliser par une fonction :

$$
\forall\ t \in \mathbb{R},\ i_{\mathscr{E}}(t) \underset{\mathscr{E} \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}
$$

Mais dans le nouveau cadre des distributions qui généralise la notion de fonction, on peut maintenant donner un sens à ce vers quoi tend $i_{\mathscr{E}}$ quand $\mathscr{E}$ tend vers 0 et modéliser rigoureusement l'impulsion idéale.
En effet, on peut définir maintenant l'impulsion idéale par la distribution vers laquelle tend $[i_{\mathscr{E}}]$, la distribution associée à $i_{\mathscr{E}}$, quand $\mathscr{E}$ tend vers 0 :

$$
\begin{aligned}
\forall\, \phi \in \mathscr{D},\ \langle [i_{\mathscr{E}}] \mid \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, i_{\mathscr{E}}(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\mathscr{E}} \int_0^{\mathscr{E}} \phi(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\mathscr{E}} [F(x)]_0^{\mathscr{E}} \qquad \text{(avec } F \text{ une primitive de } \phi\text{)} \\
&= \frac{F(\mathscr{E}) - F(0)}{\mathscr{E} - 0} \\
&\underset{\mathscr{E} \to 0}{\to} F'(0) \\
&\underset{\mathscr{E} \to 0}{\to} \phi(0) \qquad \text{(car } F \text{ est une primitive de } \phi\text{)} \\
&\underset{\mathscr{E} \to 0}{\to} \langle \delta_0 \mid \phi \rangle
\end{aligned}
$$

Donc la distribution associée à la fonction $i_{\mathscr{E}}$ se rapproche vers la distribution de Dirac en 0 quand $\mathscr{E}$ se rapproche de 0. Ce « coup de marteau éclair et infiniment brutal » sur le système se modélise donc par la distribution de Dirac δ_0.

L'impulsion idéale se modélise par la distribution de Dirac δ_0.

On peut donc maintenant calculer la transformée de Laplace de l'impulsion idéale δ_0 :

$$
\begin{aligned}
\forall\, \phi \in \mathscr{D},\ \langle \mathscr{L}(\delta_0) \mid \phi \rangle &= \langle \delta_0 \mid \mathscr{L}(\phi) \rangle \\
&= [\mathscr{L}(\phi)](0) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-0 \times t} \phi(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \phi(t) \times 1\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \times \mathscr{U}(t)\, dt \\
&= \langle [\mathscr{U}] \mid \phi \rangle
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\mathscr{L}(\delta_0) = [\mathscr{U}]
$$

La transformée de Laplace de l'impulsion idéale est la fonction échelon unité de Heaviside.

En notant respectivement h et H la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert, il en découle :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(h) &= H \cdot \mathscr{L}(\delta_0) \\
&= H \cdot \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

La réponse impulsionnelle est l'original de la fonction de transfert.

4.4 Utilité de la réponse impulsionnelle

Remarque (Dans le domaine temporel, à quoi correspond la multiplication dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert ?)
Dans le domaine fréquentiel, on multiplie par la fonction de transfert la transformée de Laplace de l'excitation pour obtenir la transformée de Laplace de la réponse. On aimerait bien que cela soit aussi simple dans le domaine temporel. Mais ce n'est pas le cas : on ne multiplie par l'excitation par une certaine fonction pour obtenir la réponse. En fait, c'est tout de même le cas mais avec une autre multiplication : **le produit de convolution**.

Définition (produit de convolution de deux fonctions continues par morceaux)
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux.
On appelle **produit de convolution** de f par g, la fonction notée $f * g$ définie comme suit quand elle a un sens (ie quand l'intégrale généralisée concernée est convergente) :

$$
\forall\, t \in \mathbb{R},\ (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cdot g(t-s)\, ds
$$

Théorème (**La transformation de Laplace transforme le produit de convolution en le produit usuel.**)
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, nuls sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle telles que $f * g$ soit bien défini.
Alors $f * g$ est continue par morceaux, nul sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)}$$

Ainsi, si on excite le système avec un signal d'entrée e, on a en notant s le signal de sortie :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(s) &= H \cdot \mathscr{L}(e) \\ &= \mathscr{L}(h) \cdot \mathscr{L}(e) \\ &= \mathscr{L}(h * e)\end{aligned}$$

$$\boxed{s = h * e}$$

La multiplication par la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel correspond à la convolution par la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.

Dans le domaine temporel, pour calculer la réponse s d'un système à une excitation e, on effectue le produit de convolution de la réponse impulsionnelle par cette excitation.