CORRECTION DU TP SUR LE RÉCHAUFFEMENT CLIMATIQUE

S. Labopin

Table des matières

1 Énoncé

Comme le taux de CO_2 dans l'atmosphère est la principale cause du réchauffement climatique, on souhaite **modéliser son évolution en fonction du temps par une fonction** m afin de réaliser des constats, des prédictions et de proposer des conduites à tenir en rapport avec le phénomène du réchauffement climatique et la limite planétaire correspondante (cf article « Les 9 limites planétaires » sur agence-lucie.com à l'url `https://agence-lucie.com/limites-planetaires`).

Dans l'article « Qu'est-ce qu'un forçage climatique ? » de David Saint-Martin et Olivier Boucher, on **distingue** deux types de facteurs qui influencent ce taux :

- Le **forçage naturel** : Soleil, volcanisme,...
- Le **forçage anthropique** : activités humaines, gaz à effet de serre notamment

On souhaiterais alors **distinguer** clairement dans cette **modélisation** d'une part la **réponse au forçage naturel** que ce taux aurait s'il n'était soumis qu'au **forçage naturel** et, d'autre part, la **réponse au forçage anthropique** qu'il aurait s'il n'était soumis qu'au **forçage anthropique**. Pour ce faire, on décide de rechercher m sous la forme de la **superposition de la réponse au forçage naturel et de la réponse au forçage anthropique**, c'est-à-dire la **somme** suivante :

$$\boxed{m(t) = s(t) + f(t)} \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} s(t) \text{ modélise la } \textbf{réponse au forçage naturel} \\ f(t) \text{ modélise la } \textbf{réponse au forçage anthropique} \end{array} \right.$$

Le **forçage naturel** n'étant dû principalement qu'à des phénomènes oscillatoires, périodiques et d'amplitude « constante », il est naturel de le représenter par une **équation différentielle d'oscillateur harmonique libre simple** dont l'unique caractéristique est alors sa pulsation propre ω (appelée aussi fréquence angulaire) :

$$\boxed{\text{L'équation } y'' + \omega^2.y = 0 \text{ modélise le } \textbf{forçage naturel}.}$$

La **réponse au forçage naturel** est alors modélisée par une fonction cosinusoïdale de même pulsation propre dont on note A son amplitude et ϕ sa phase initiale :

$$\boxed{s(t) = A.\cos\left(\omega.t + \phi\right) \text{ modélise le } \textbf{réponse au forçage naturel}.}$$

En l'absence du **forçage anthropique**, la **réponse au forçage anthropique** $f(t)$ serait évidemment nulle. Il est donc naturel de le modéliser par le second membre d'une équation différentielle dont l'équation homogène associée est celle qui modélise le **forçage naturel**.

$$\boxed{\text{L'équation } y'' + \omega^2.y = g(t) \text{ modélise la loi qui régit l'évolution du taux de } CO_2 \text{ dans l'atmosphère.}}$$

$$\boxed{g(t) \text{ modélise le forçage anthropique.}}$$

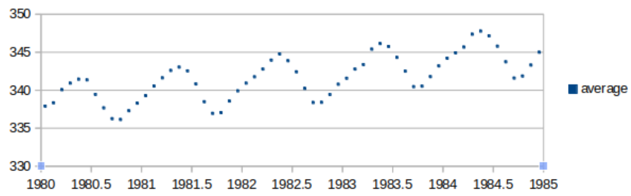
$g(t)$ pourrait être un polynôme, une série de fonctions step ou toute autre forme fonctionnelle adaptée qui reflète les changements historiques et prévus des émissions de CO_2 dues aux activités humaines.

Cette structure de modélisation permet non seulement de simuler la réaction du taux de CO_2 aux influences humaines mais aussi d'étudier l'impact potentiel des politiques de réduction des émissions sur le climat futur en modélisant cet impact par une modification du second membre de cette équation différentielle (ie une modification du forçage anthropique).

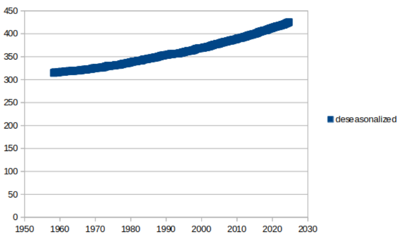
La solution de cette équation, $m(t) = s(t) + f(t)$, où la **réponse au forçage naturel** $s(t)$ est une solution de l'équation homogène et où la **réponse au forçage anthropique** $f(t)$ est une solution particulière de l'équation non homogène, nous permet ainsi de décomposer et d'analyser séparément les effets des forces naturelles et humaines sur le climat. Cette structure de modélisation constitue ainsi un cadre pour comprendre et prévoir les variations du taux de CO_2 dans l'atmosphère avec une précision qui distingue l'influence des rythmes naturels des impacts humains, afin de déterminer les efforts de mitigation du changement climatique.

1. Récupérer le fichier de données au format CSV (Comma-separated values) des mesures mensuelles de CO2 à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « Global Monitoring Laboratory » à l'url `https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.txt`.
   Comme le nom de son format l'indique, un tel fichier stocke des valeurs en les séparant par des virgules. Les logiciels comme *Excel* et *LibreOffice Calc* sont en particulier conçus pour reconnaître ce format et générer automatiquement une feuille de calcul structurant l'information des données contenues.
   Utiliser l'un de ces logiciels pour générer une telle feuille de calcul prête à l'analyse de ces mesures de taux de CO_2.

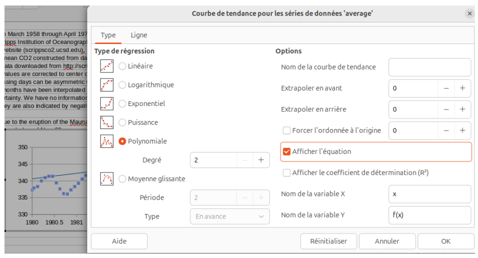
2. Via cette feuille de calcul, tracer le nuage des points représentant les mesures du taux de CO_2, avec la date des mesures en abscisse et le taux de CO_2 en micromole par mole d'air sec en ordonnée. Changer ensuite le cadrage pour faire apparaître les mesures effectuées de 2018 à 2023.
   ⚠S'assurer de bien formater les dates sur l'axe des abscisses. En effet, dans le fichier *CSV*, les nombres sont écrits avec un point et non avec une virgule. Peut-être faut-il le faire lors de la génération du fichier.

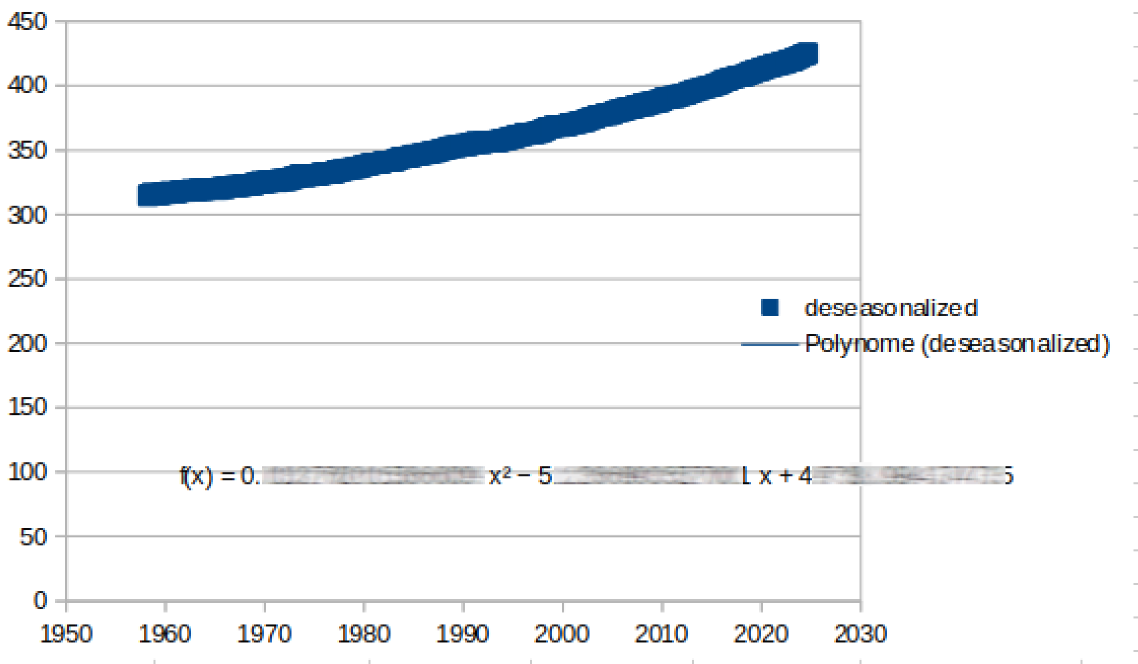


3. Via cette feuille de calcul, en utilisant le champ `"deseasonalized"`, tracer maintenant le nuage de points représentant la réponse au forçage anthropique.



4. Ajouter au graphique relatif à la réponse au forçage anthropique la courbe de tendance correspondant à la fonction polynomiale de degré 2 modélisant cette réponse au forçage anthropique. Ne pas oublier de choisir l'option d'afficher une expression de cette dernière fonction qui constitue alors le terme polynomial de la modélisation recherchée.
   Une expression de cette fonction devrait apparaître comme dans la capture d'écran ci-dessous (sans le floutage).



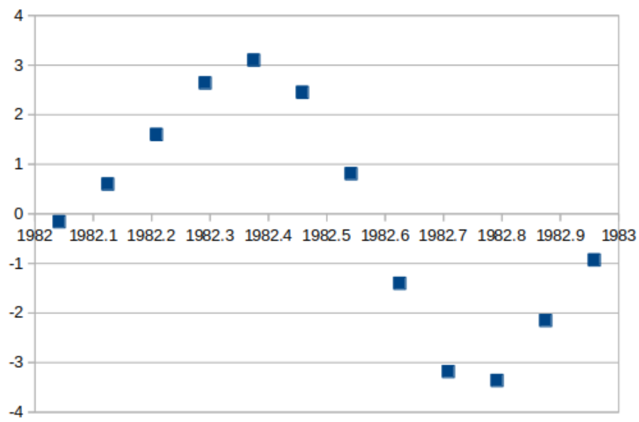


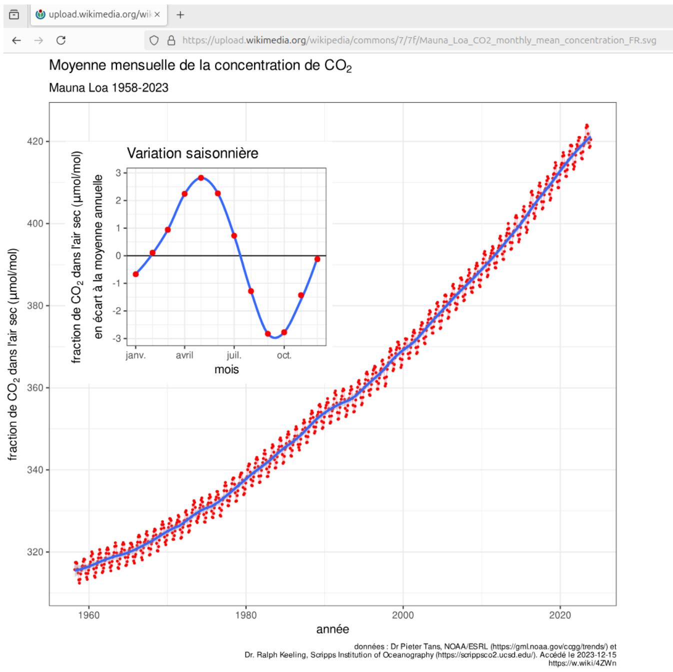
5. En notant (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_N, y_N) les points du nuage susmentionné et f la fonction polynomiale de degré 2 déterminée à la question précédente, on appelle erreur relative globale de f relativement à ce nuage le nombre $\mathscr{E}$ suivant :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - f(x_i)}{|y_i|}$$

   Via *Excel* ou *LibreOffice Calc*, calculer l'erreur relative globale $\mathscr{E}$ et interpréter le résultat obtenu.

6. Via cette feuille de calcul, tracer maintenant le nuage de points correspondant à la réponse au forçage naturel durant l'année 1982.
   Ci-contre, on trouve la courbe de Keeling illustrant la concentration mensuelle moyenne de CO2 mesurée à l'Observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de CO2 dans l'atmosphère terrestre depuis 1958.
   Sur ce même graphique, on trouve aussi la réprésentation du taux de CO_2 en écart avec la moyenne annuelle. On peut donc le comparer avec le graphique obtenu via *Excel* ou *LibreOffice Calc* qui doit ressembler à la figure ci-dessous.





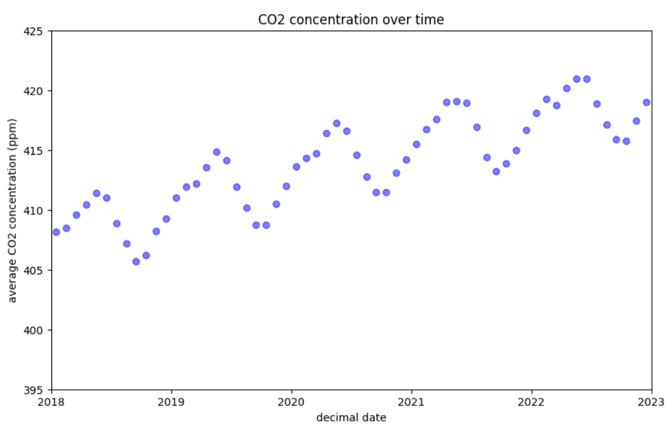
Courbe de Keeling illustrant la concentration mensuelle moyenne de CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de CO_2 dans l'atmosphère terrestre depuis 1958. Source : Wikipedia.

7. On a précédemment déterminé une approximation f de la réponse au forçage anthropique. Pour obtenir une approximation de l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère, il ne reste donc qu'à déterminer une approximation s de la réponse au forçage naturel. Cependant, les logiciels comme *Excel* et *LibreOffice Calc* ne permettent pas d'approximer un nuage de points avec une fonction cosinusoïdale.
   En vu d'obtenir une telle approximation, on utilise le module *Pandas* de *Python* car il propose des outils permettant d'exploiter un fichier au format CSV.
   Copier le fichier `co2_mm_mlo.csv` dans un sous-répertoire (du répertoire courant) nommé `data` puis utiliser le code *Python* ci-contre pour récupérer toutes les données de ce fichier dans une variable `df` puis pour afficher toutes ses données.

```python
import pandas as pd

# Charger le fichier en indiquant ',' pour le séparateur
# et '#' pour les lignes de commentaire
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')

# Configurer pandas pour afficher toutes les lignes
pd.set_option('display.max_rows', None)

# Afficher le DataFrame
print(df)
```

```
    year  month  decimal date  average  deseasonalized  ndays  sdev   unc
0   1958      3     1958.2027   315.71          314.44     -1 -9.99 -0.99
1   1958      4     1958.2877   317.45          315.16     -1 -9.99 -0.99
2   1958      5     1958.3699   317.51          314.69     -1 -9.99 -0.99
3   1958      6     1958.4548   317.27          315.15     -1 -9.99 -0.99
4   1958      7     1958.5370   315.87          315.20     -1 -9.99 -0.99
5   1958      8     1958.6219   314.93          316.21     -1 -9.99 -0.99
6   1958      9     1958.7068   313.21          316.11     -1 -9.99 -0.99
```

8. On trouve ci-contre un autre exemple d'utilisation du module *Pandas* pour tracer ci-dessous le nuage de points relatif aux mesures de taux de CO_2 effectuées à l'Observatoire de Mauna Loa :




```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
df = pd.read_csv(
    'data/co2_mm_mlo.csv',
    sep=',',
    comment='#')

# Tracer le nuage de points
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(
    df['decimal date'],
    df['average'],
    color='blue',
    alpha=0.5)
plt.xlabel('decimal date')
plt.ylabel('average CO2 concentration (ppm)')
plt.title('CO2 concentration over time')
plt.xlim(2018, 2023)
plt.ylim(395, 425)
plt.show()
```

   S'inspirer de ce code pour tracer avec le module *Pandas* les deux derniers nuages de points tracés précédemment avec *Excel* ou *LibreOffice Calc*.

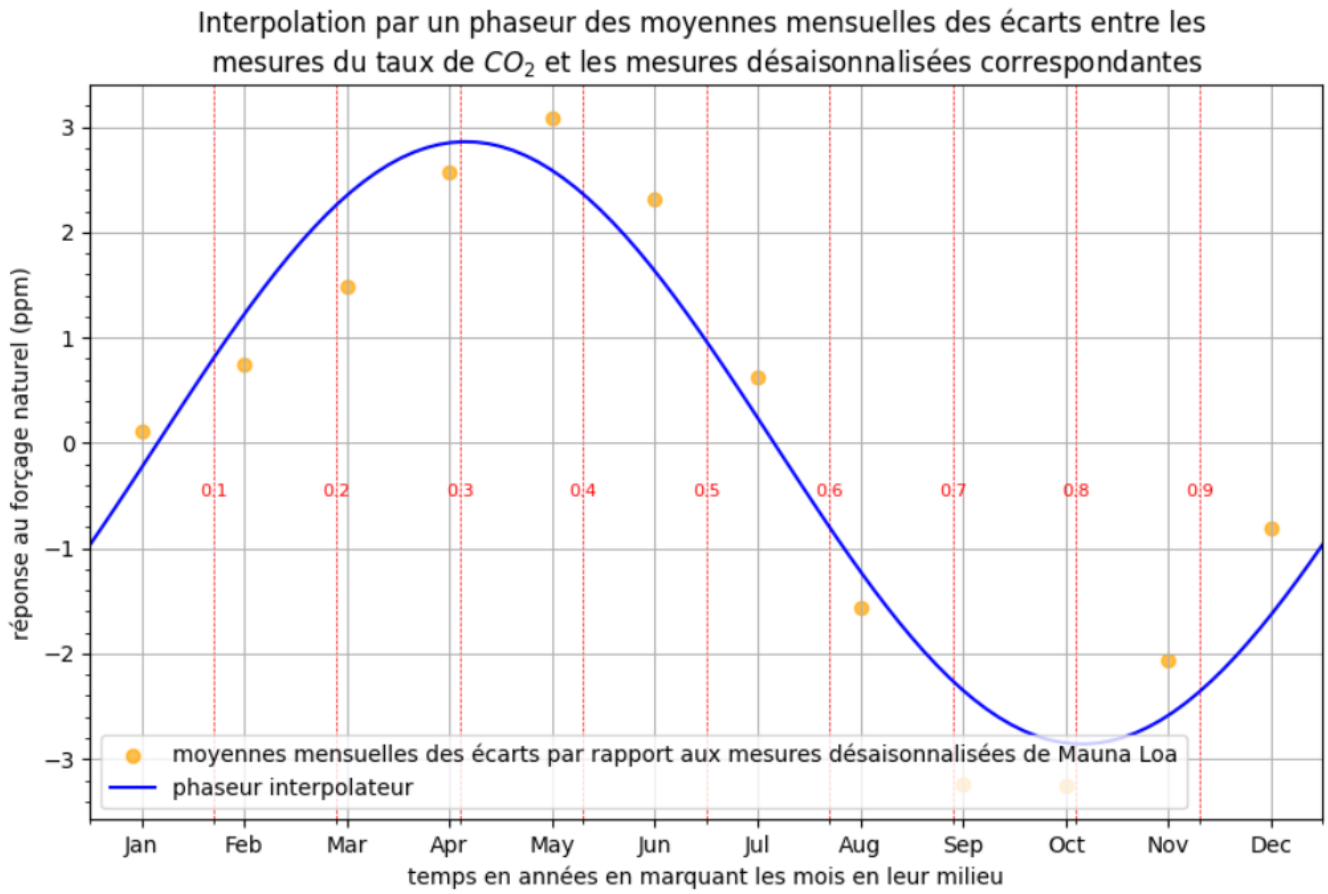
9. Que fait précisément le code *Python* ci-contre ?
Pourquoi ?
Exécuter ce code.
Par une lecture graphique, estimer les caractéristiques d'une fonction cosinusoïdale qui pourrait modéliser la réponse au forçage naturel, ie :
    - amplitude
    - pulsation propre
    - phase initiale

   Calculer l'erreur relative globale de cette approximation relativement à ce nuage de points et interpréter le résultat obtenu.

```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']
monthly_means = df.groupby(df['month'])['average_minus_deseasonalized'].mean()
x_ticks = (np.arange(1, 13) - 0.5) / 12
x_labels = ['jan', 'fév', 'mar', 'avr', 'mai', 'jui',
            'jui', 'aoû', 'sep', 'oct', 'nov', 'déc']
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(x_ticks, monthly_means, color='orange', alpha=0.7)
plt.xticks(x_ticks, x_labels)
plt.xlim(0, 1)
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth=0.75)
plt.minorticks_on()
plt.grid(which='minor', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.gca().xaxis.set_minor_locator(plt.MultipleLocator(0.1))
ax = plt.gca()
ax.xaxis.grid(True, which='minor', color='red', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.xlabel('mois')
plt.ylabel(r'taux de $CO_2$ (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel')
plt.show()
```

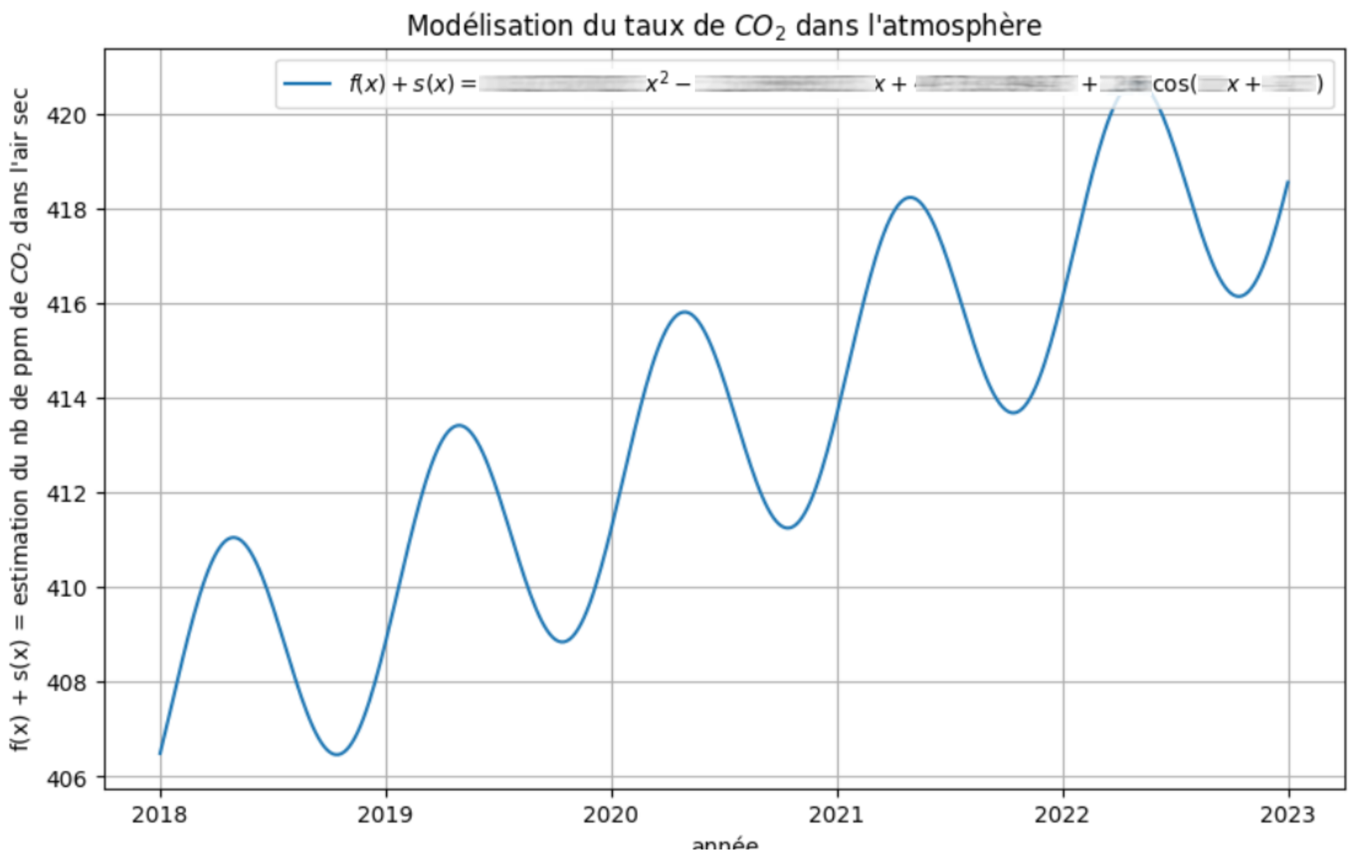
10. Modifier ce code de façon à obtenir une approximation par une fonction cosinusoïdale s du forçage naturel.
Indication : Pour ce faire, utiliser la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python*.
Consulter la page de documentation concernant la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python* sur la documention officielle en ligne du module *Scipy* à l'url `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html`.
Calculer l'erreur relative globale de cette approximation relativement à ce nuage de points et interpréter le résultat obtenu.

```
L'expression ajustée du phaseur est : f(x) =       * cos(     * x +      ) + 0.00
```



11. Déterminer l'amplitude, la pulsation propre, la fréquence et la phase initiale de la fonction cosinusoïdale déterminé via *Python* à la question précédente.
12. En déduire l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants qui modélise le forçage naturel.

13. Via *Python*, tracer pour les années de 2018 à 2023 la modélisation de l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère que l'on a obtenue précédemment.



14. Déterminer l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont la modélisation de l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère est solution.
15. En déduire une modélisation g du forçage anthropique.
16. Dans l'article « Les 9 limites planétaires » sur agence-lucie.com à l'url `https://agence-lucie.com/limites-planetaire`, on lit :

> *« Le changement climatique est sans doute la limite planétaire la plus connue du grand public.*
> *Médiatisé dès les années 70 par le rapport du Club du Rome, le changement climatique est déjà une réalité. Les différents rapports du GIEC (groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) font la synthèse de l'état des connaissances scientifiques sur le sujet. Le constat est sans appel, le réchauffement climatique à l'œuvre est causé par les activités humaines et atteint déjà* $+1,1°C$ *par rapport à l'ère préindustrielle.*
> *Par son ampleur, le changement climatique entraîne la multiplication des événements climatiques extrêmes (sécheresses, dômes de chaleurs, inondations, ouragans) et affecte d'ores et déjà notre quotidien.*
> *Le seuil du changement climatique se mesure à partir de la concentration en* CO_2 *de l'atmosphère, qui doit être inférieur à* 350 *parties par million* (ppm). *»*

Déterminer quand la limite planétaire du changement climatique a été franchie selon cette modélisation.

17. Dans l'article « PPM : à quoi correspond cette unité de mesure de la pollution ? » sur le site offciel du magazine *Geo* à l'url `https://www.geo.fr/environnement/ppm-a-quoi-correspond-cette-unite-de-mesure-de-la-pollution-193340`, on lit :

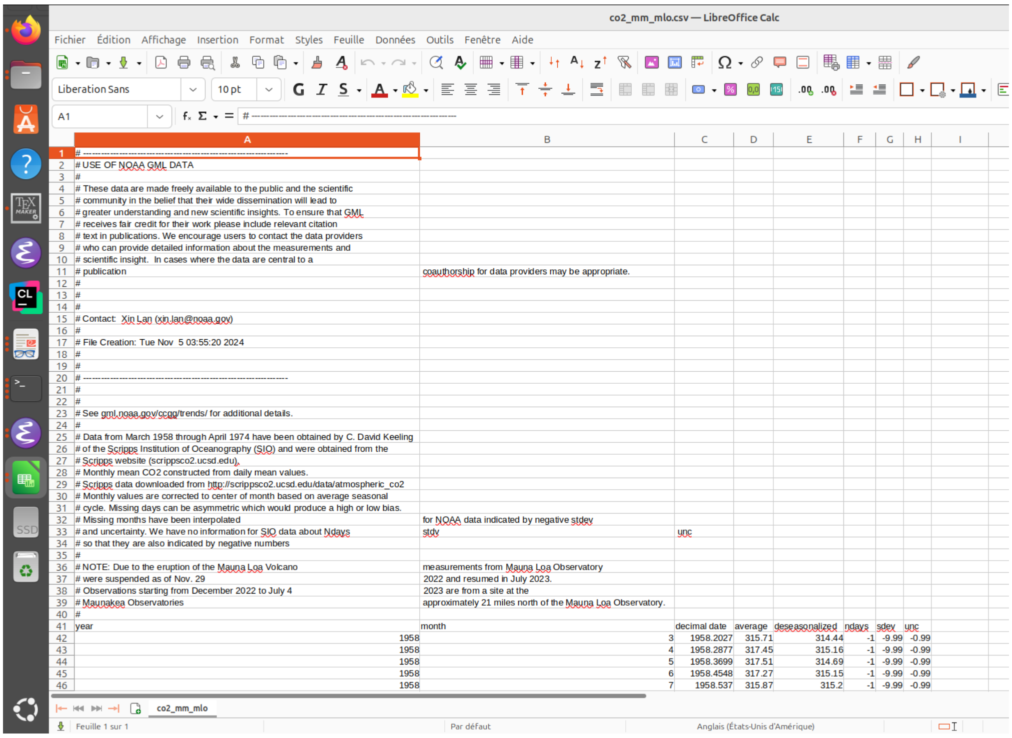
> *« Une atmosphère à* 400 ppm *signifie qu'il y a* 400 *molécules polluées sur* 1 *million de molécules d'air. Même pendant la révolution industrielle du* $XIX^{ème}$ *siècle et la combustion massive des énergies fossiles, le taux de* ppm *n'avait jamais excédé les* 300. *Les prévisions estiment que d'ici 2030, le taux de* ppm *moyen dans l'atmosphère atteindra les* 450.
> *Les risques d'un taux de molécules trop élevé sont nombreux. Dès* $0,1$ % *de pollution de l'air* (1 000 ppm), *les conséquences sur la santé peuvent être irréversibles : asthme, maladies respiratoires et cardio-vasculaires L'impact sur le réchauffement climatique est d'autant plus grave : plus l'indice moyen est élevé, plus on observera au fil des années une augmentation importante de la chaleur atmosphérique. À cet effet, le* ppm *est un indicateur important pour échelonner les risques et mieux comprendre où nous nous situons en termes de pollution atmosphérique. »*

Déterminer quand l'air pourra avoir des conséquences irréversibles sur la santé selon cette modélisation.

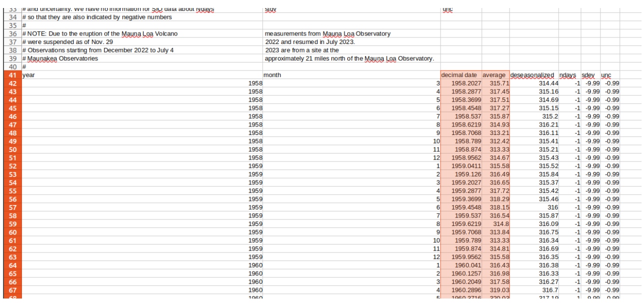
2 Correction

1.
   - Avec un navigateur, on récupère le fichier `https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.csv`.
   - On repère le fichier téléchargé `co2_mm_mlo.csv` dans le système de fichier via un navigateur de fichier et la connaissance du répertoire de téléchargement du navigateur susmentionné.
   - On demande via un navigateur de fichier l'ouverture de ce fichier `co2_mm_mlo.csv` par *Excel* ou *LibreOffice Calc*. Lors de cette importation du format *CSV* vers le format de feuille de calcul usuel de *Excel* ou *LibreOffice Calc*, sélectionner une configuration régionale qui utilise le point comme séparateur décimal (« Anglais (États-Unis d'Amérique » par exemple).
   - Il est une bonne pratique d'avoir une arborescence du type suivant, avec un répertoire `TP_rechauffement_climatique` pour le TP contenant un fichier dans lequel on rédige un rapport et deux sous-répertoires `data` et `feuille_calcul` contenant respectivement le fichier *CSV* `co2_mm_mlo.csv` téléchargé contenant les données que l'on ne modifiera pas et un autre fichier *CSV* `co2_mm_mlo.csv` que l'on va exploité avec *Excel* ou *LibreOffice Calc* :

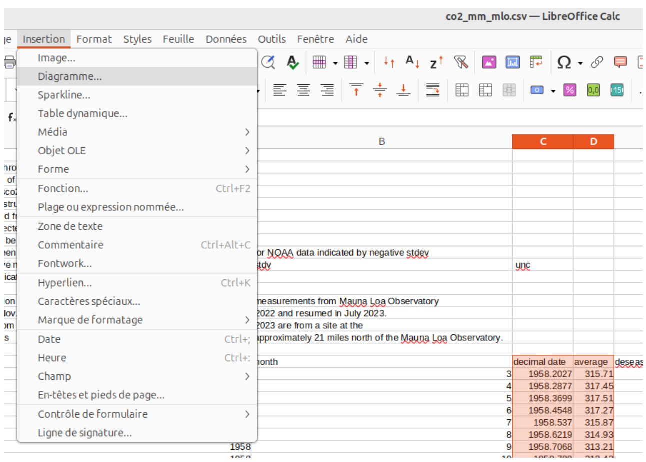
```
TP_rechauffement_climatique
├── data
│   └── co2_mm_mlo.csv
├── feuille_calcul
│   └── co2_mm_mlo.<format du logiciel de traitement de feuille de calcul utilisé>
└── TP_rechauffement_climatique_correction.<format du rapport>
```



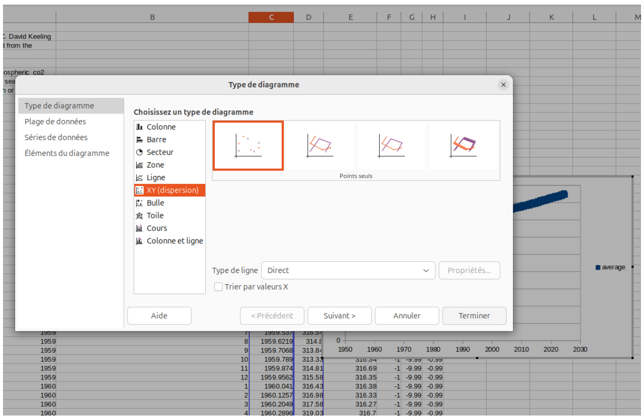
2.



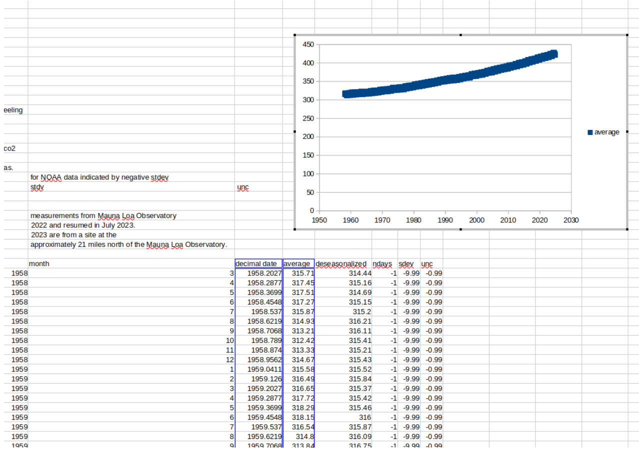
On sélectionne les cellules contenant les titres `"decimal date"` et `"average"` et les cellules contenant les données correspondantes.



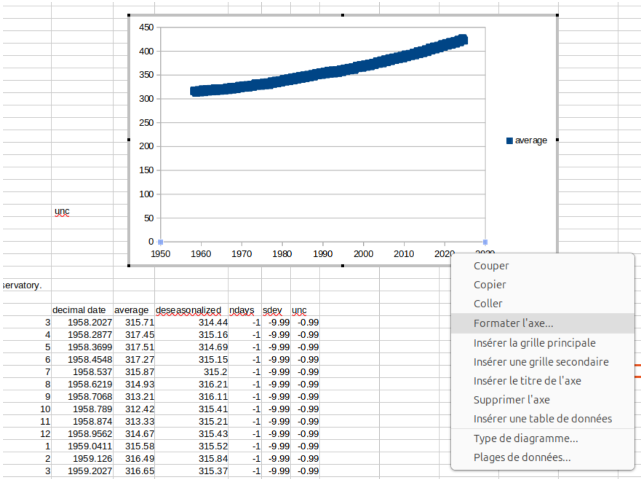
On s'apprête à sélectionner l'item `"Diagramme"` du menu déroulant `"Insertion"`.



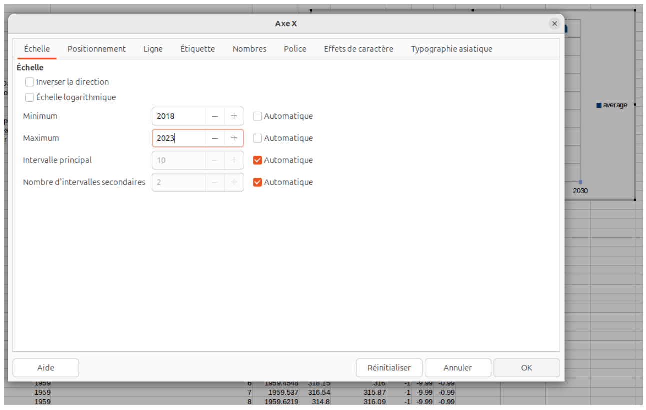
On sélectionne le type de diagramme "XY(dispersion)" pour représenter cette série statistique double avec un nuage de points.



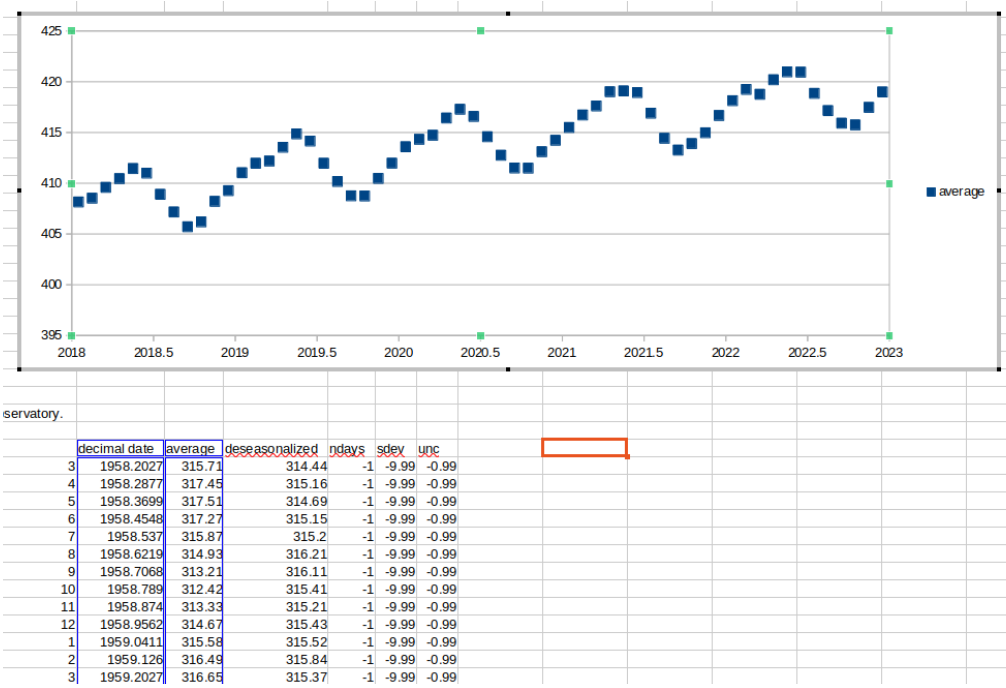
On obtient un nuage de points qui ressemble à une courbe « épaisse » car les points sont peu espacés sur cette représentation.



On sélectionne avec un clic droit l'axe des abscisses et on s'apprête à sélectionner l'item "Formater l'axe..." du menu qui apparaît.

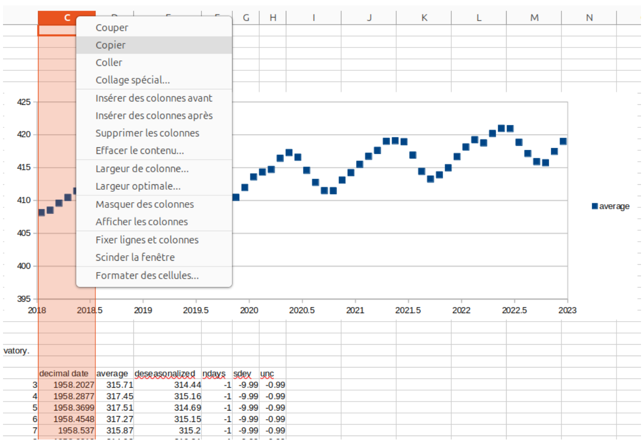


Dans l'onglet "Échelle" de la fenêtre qui apparaît, on désactive l'option "Automatique" correspondant aux champs de saisie étiquetés "Minimum" et "Maximum" pour leur soumettre respectivement les valeurs 2018 et 2023.

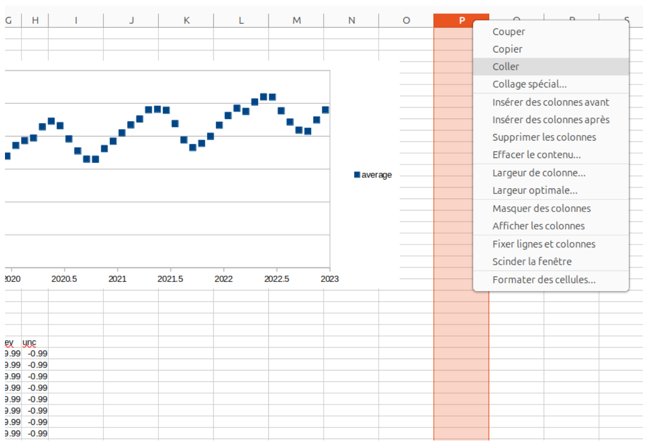


Après avoir cliqué sur le bouton "OK", on obtient les points du nuage susmentionné qui ont une abscisse comprise entre 2018 et 2023.

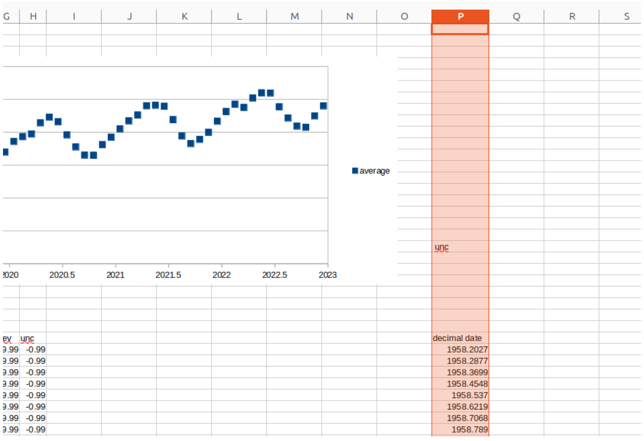
3. Il s'agit de tracer le nuage de points dont les abscisses sont les valeurs titrées "decimal date" et dont les ordonnées sont les valeurs titrées "deseasonalized".
   Comme certains logiciels de traitement de feuille de calcul que celui utilisé ici ne permet pas de sélectionner deux colonnes non adjacentes comme c'est le cas pour les colonnes "decimal date" et "deseasonalized", on doit d'abord les recopier dans deux autres colonnes adjacentes avant de procéder comme dans la question précédente pour tracer le nuage de points correspondant :



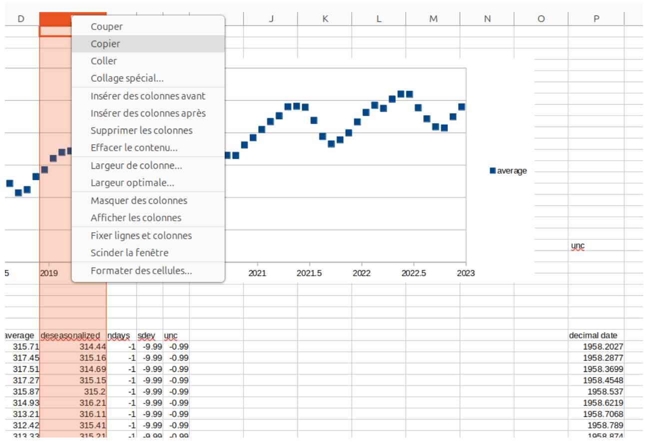
On sélectionne la colonne contenant les données titrées "decimal date" avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item "Copier".



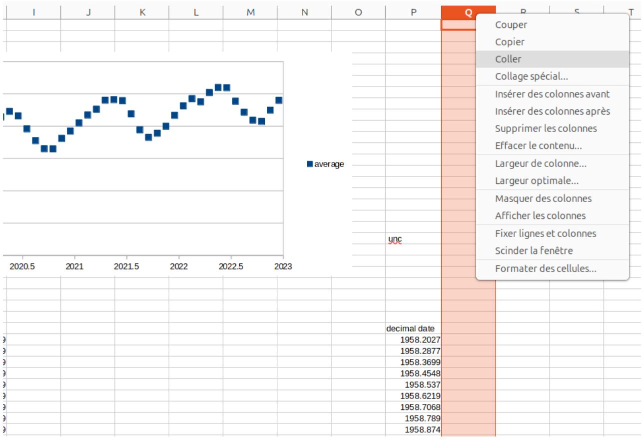
On sélectionne la colonne P avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item "Coller".



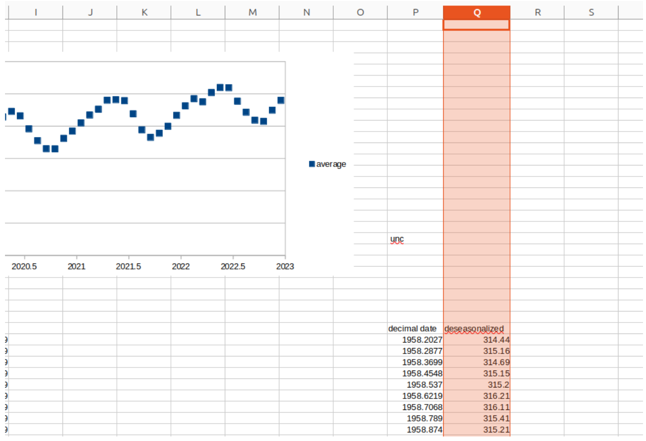
On obtient une copie de la colonne contenant les données titrées "`decimal date`" dans la colonne `P`.



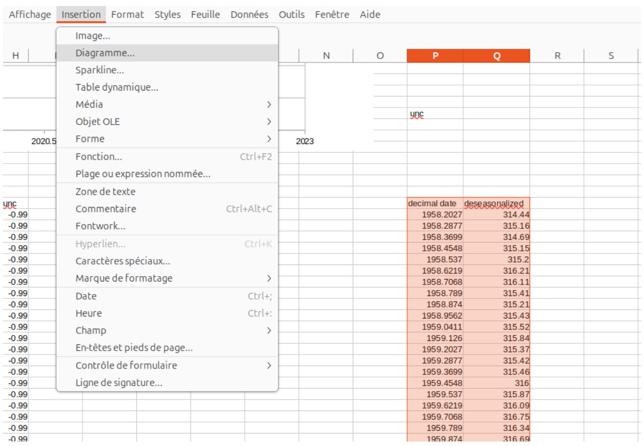
On sélectionne la colonne contenant les données titrées "`deseasonalized`" avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item "`Copier`".



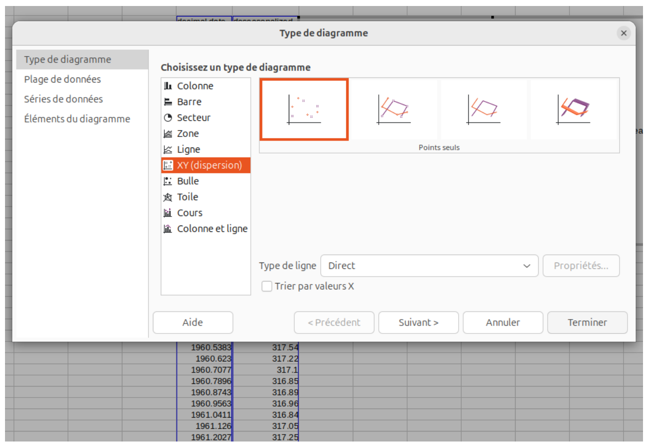
On sélectionne la colonne `Q` avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item "`Coller`".



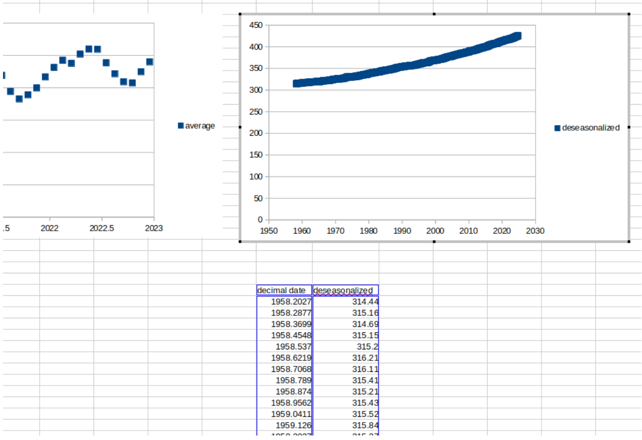
On obtient une copie de la colonne contenant les données titrées "`deseasonalized`" dans la colonne `Q`.

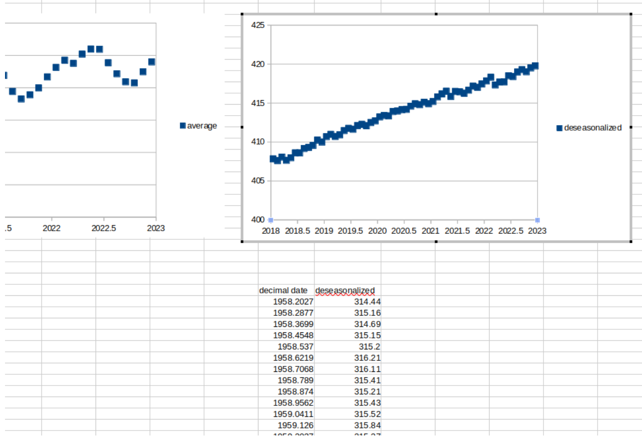


On sélectionne les cellules des colonnes adjacentes `P` et `Q` contenant les titres "`decimal date`" et "`deseasonalized`" et les cellules contenant les données correspondantes puis on s'apprête à sélectionner l'item "`Diagramme`" du menu déroulant "`Insertion`".



On sélectionne le type de diagramme "`XY(dispersion)`" pour représenter cette série statistique double avec un nuage de points.

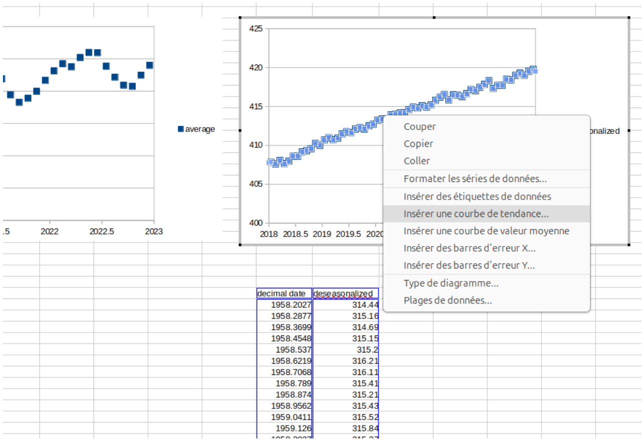


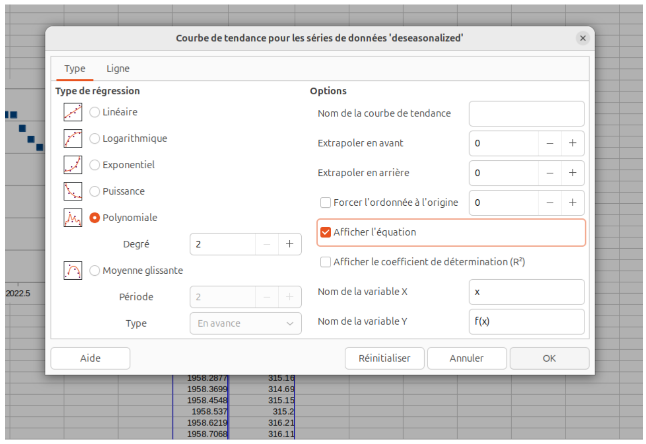


On obtient un nuage de points qui ressemble à une courbe « épaisse » car les points sont peu espacés sur cette représentation.

⚠Ce n'est pas la même courbe que celle obtenue précédemment sur la gauche. En effet, en recadrant les abscisses de 2018 à 2023, on n'observe plus le comportement oscillatoire causé par les phénomènes saisonniers (photosynthèse et respiration des plantes, décomposition des matières organiques, conditions météorologiques et température, cycles océaniques,...). On n'observe seulement la réponse au forçage anthropique.

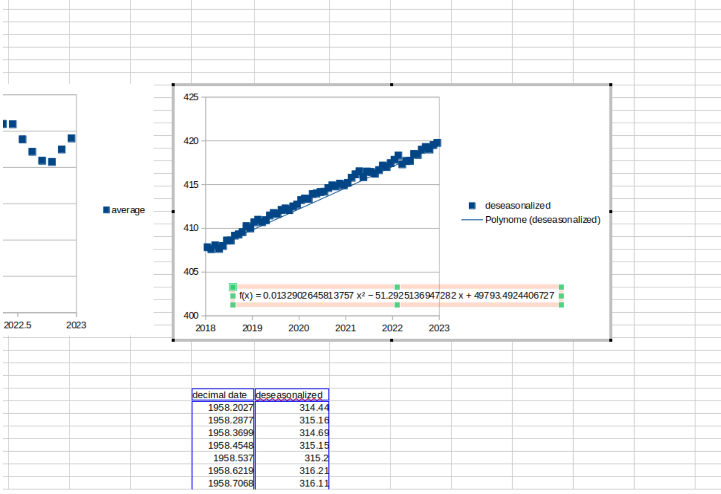
4.





On sélectionne avec un clic droit la courbe de la réponse au forçage anthropique et on s'apprête à sélectionner l'item `"Insérer une courbe de tendance..."` du menu qui apparaît.

Dans l'onglet `"Type"` de la fenêtre qui apparaît, on active l'option `"Polynomiale"`, on soumet la valeur `"2"` dans le champ de saisie étiqueté `"Degré"` et on active l'option `"Afficher l'équation"`.

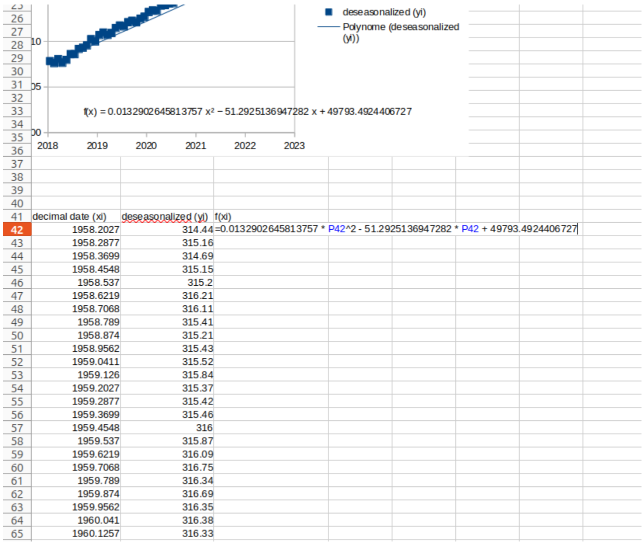


On obtient la courbe d'une approximation polynomiale f de degré 2 du nuage de points modélisant la réponse au forçage anthropique et on expression de cette dernière.

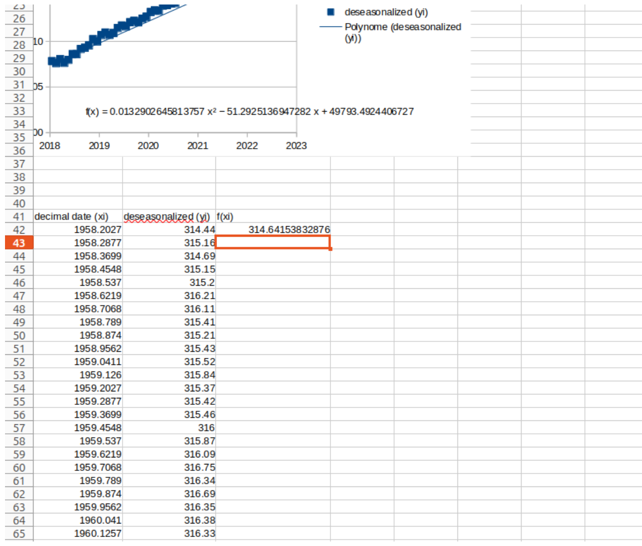
Ainsi, la fonction f définie comme suit est une modélisation polynomiale de degré 2 de la réponse au forçage anthropique :

$$\boxed{f(x) = 0{,}0132902645813757.x^2 - 51{,}2925136947282.x + 49793{,}4924406727}$$

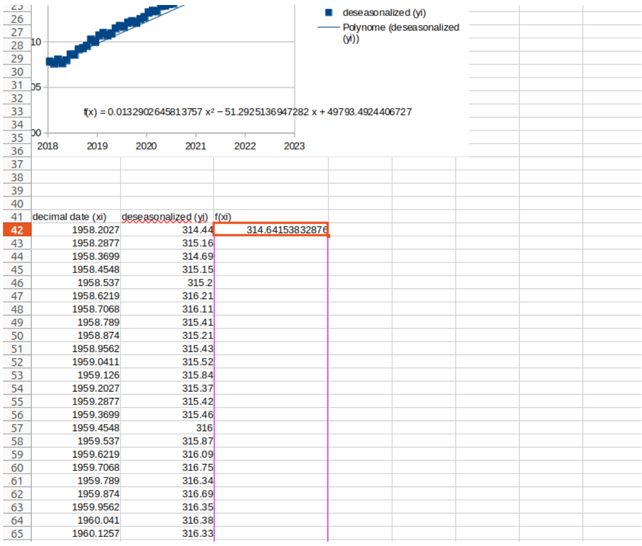
5.



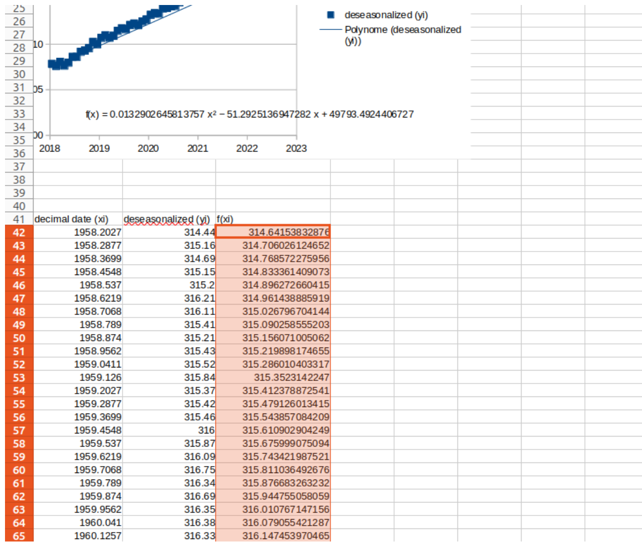
On titre une nouvelle colonne `"f(xi)"` et on s'apprête à saisir dans sa première ligne la formule « `=0.0132902645813757 * P42^2 - 51.2925136947282 * P42 + 49793.4924406727` ».



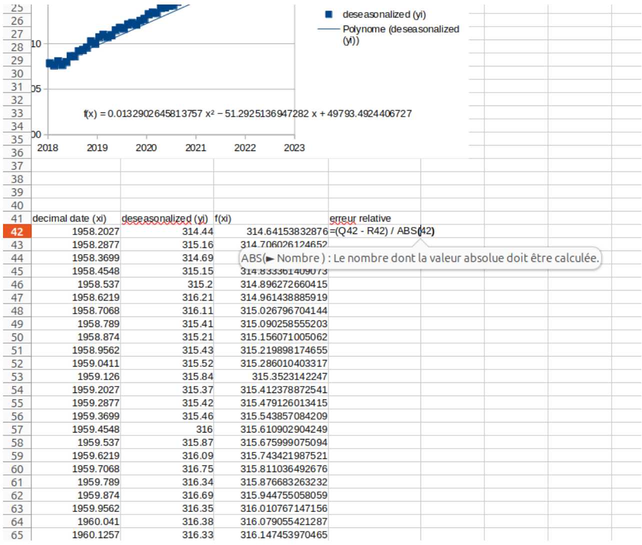
On obient l'image de la date `1958,2027` par la modélisation f.



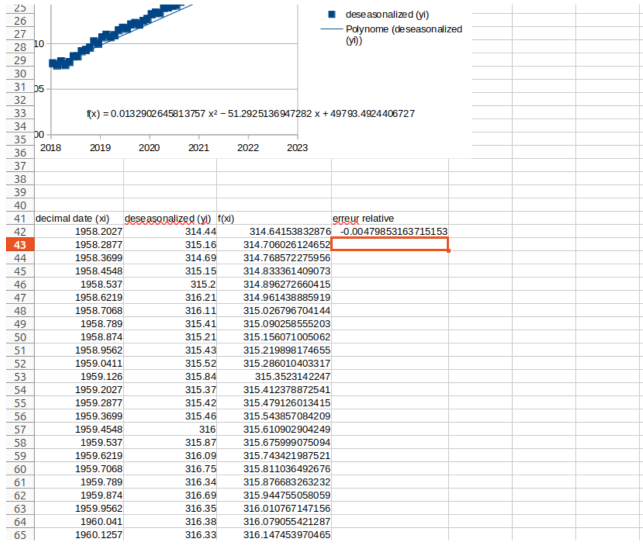
On s'apprête à utiliser la poignée de saisie pour calculer l'image par f de toutes les autres dates.



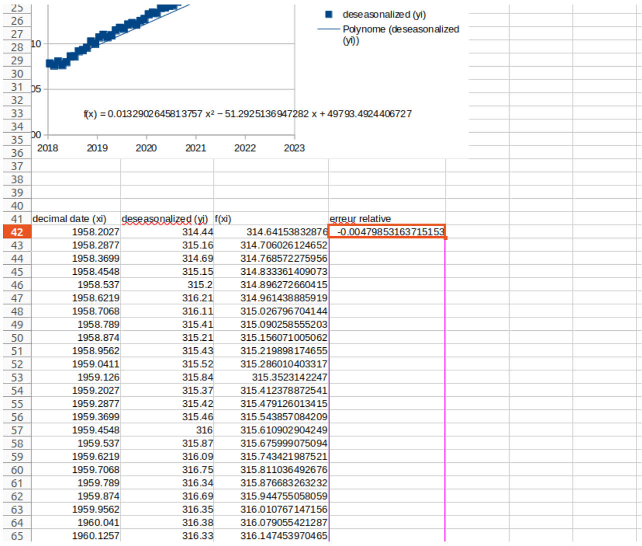
On obtient les valeurs de f qui correspondent à toutes les dates où on a relevé des mesures.



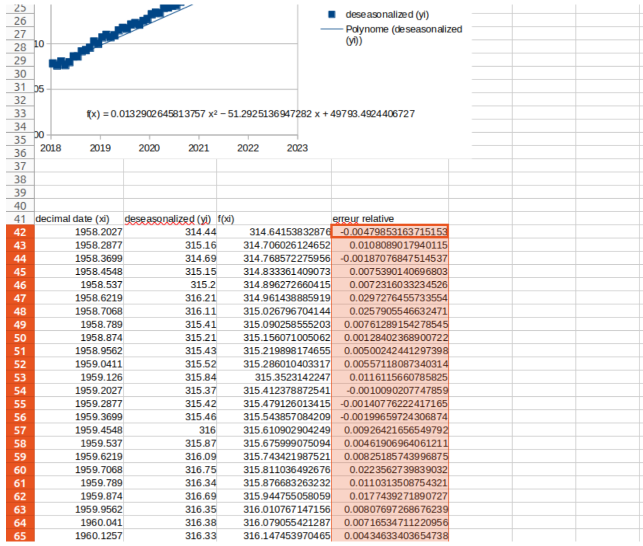
On titre une nouvelle colonne `"erreur relative"` et on s'apprête à saisir dans sa première ligne la formule « `=(Q42 - R42) / ABS(42)` ».



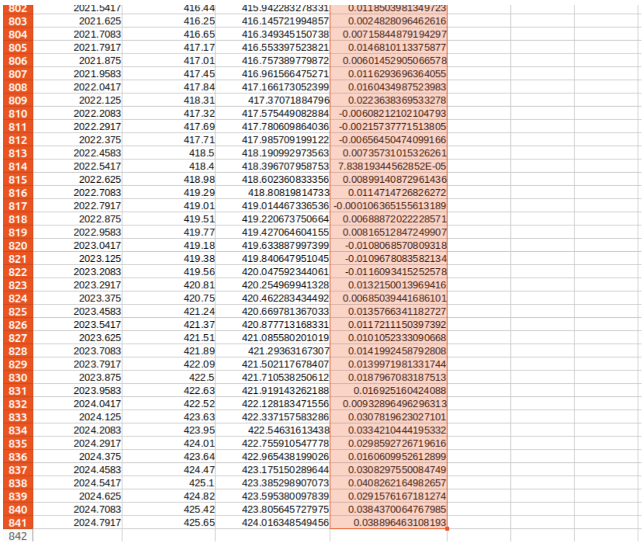
On obtient l'erreur relative commise par la modélisation f pour la mesure relevée à la date `1958,2027`.



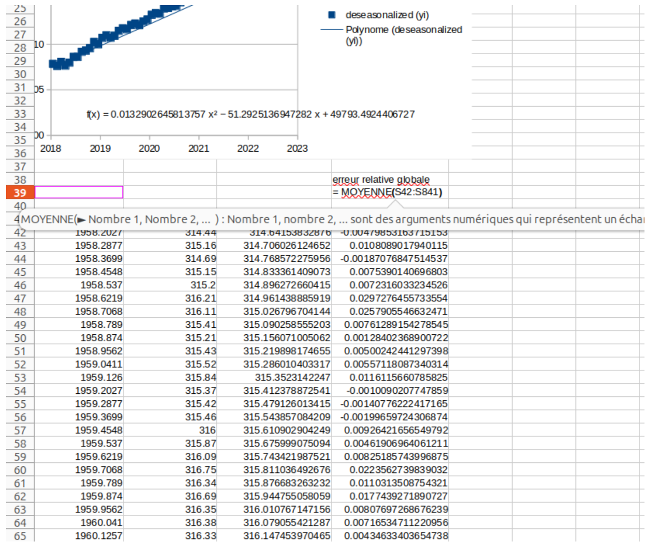
On s'apprête à utiliser la poignée de saisie pour calculer l'erreur relative commise par la modélisation f pour chacune des mesures relevées.



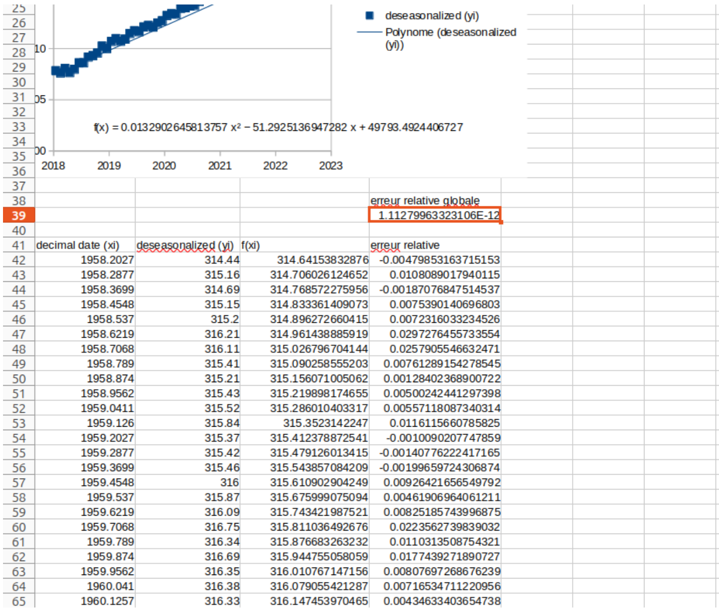
On obtient l'erreur relative commise par la modélisation f pour chacune des mesures relevées.



On repère que la dernière erreur relative calculée est enregistrée à la ligne 841.



On titre une cellule `"erreur relative globale"` et on s'apprête à saisir dans la case en-dessous la formule « `= MOYENNE(S42:S841)` ».



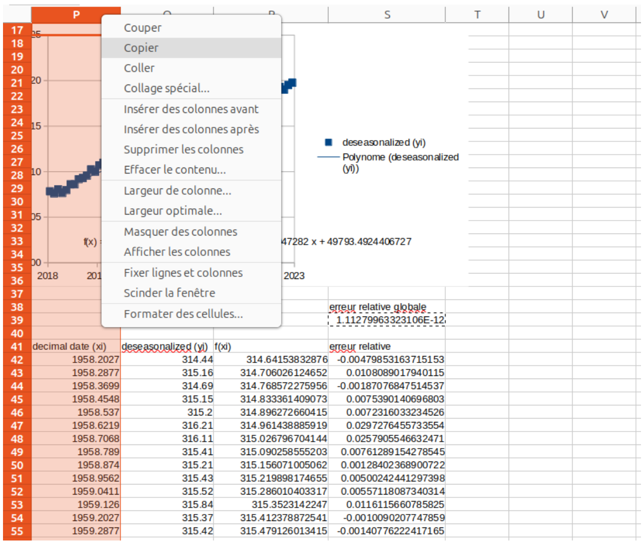
On obtient la moyenne de toutes les valeurs enregistrées dans la plage de cellules `S42:S841`.

On obtient l'erreur relative globale suivante :

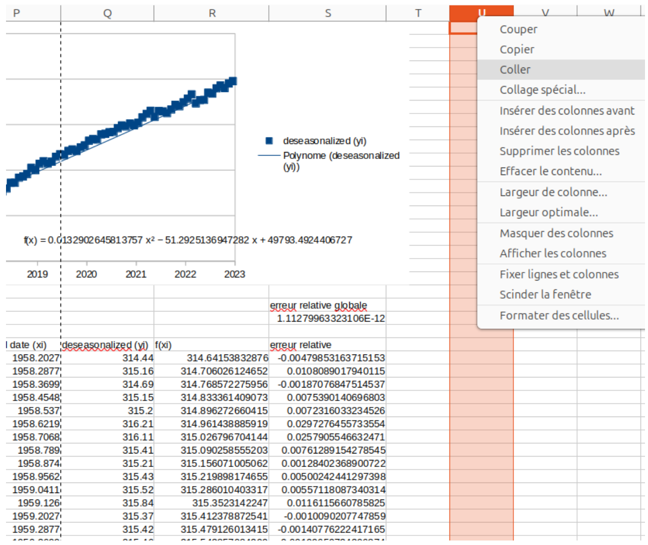
$$\mathscr{E} = 1{,}112\,799\,633\,231\,06 \cdot 10^{-12}$$

Cette valeur représente l'écart moyen relatif entre les valeurs mesurées de la réponse au forçage anthropique et celles prédites par sa modélisation f. Les valeurs de f sont donc en moyenne environ un billionième plus grandes que les mesures qu'elles modélisent. Cette faible erreur relative indique une très grande précision de cette modélisation.

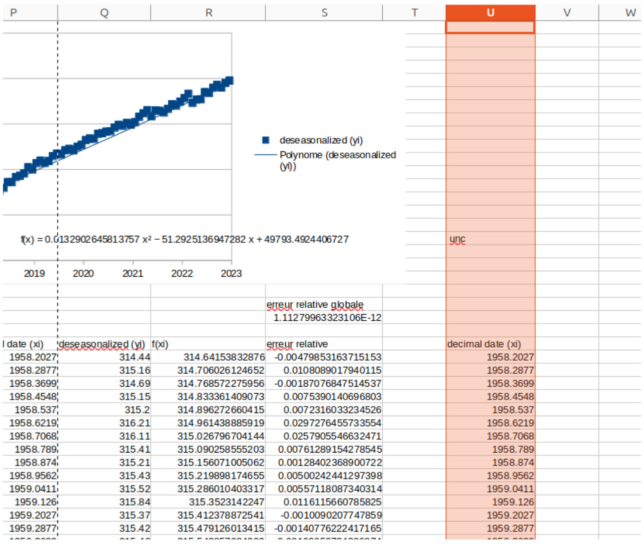
6. Comme on veut tracer un nuage de points dont les abscisses sont les valeurs titrées `"decimal date"`, on doit d'abord recopier la colonne contenant ses valeurs dans une colonne adjacente à une colonne vide dans laquelle on va calculer les moyennes mensuelles des meures de la réponse au forçage naturel pour la même raison que dans la question 3 :



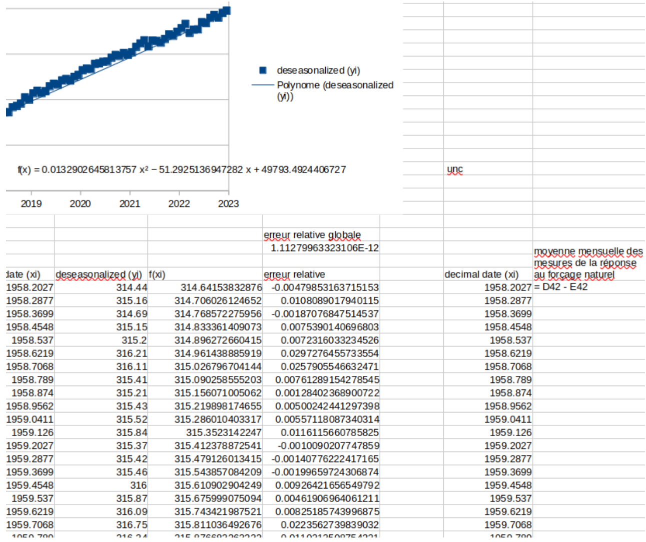
On sélectionne la colonne contenant les données titrées `"decimal date"` avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item `"Copier"`.



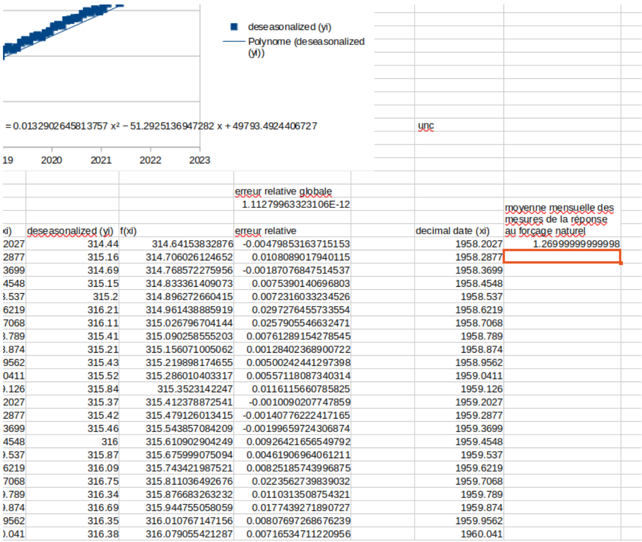
On sélectionne la colonne `U` avec un clic gauche, on fait apparaître un menu contextuel avec un clic droit puis on s'apprête à sélectionner son item `"Coller"`.



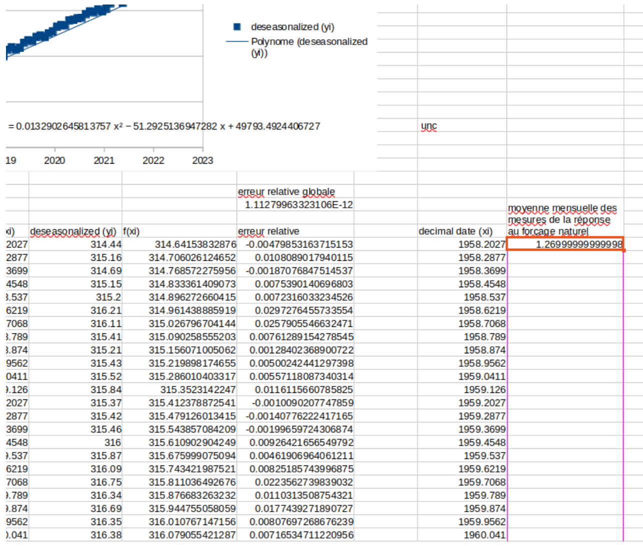
On obtient une copie de la colonne contenant les données titrées "`decimal date`" dans la colonne `U`.



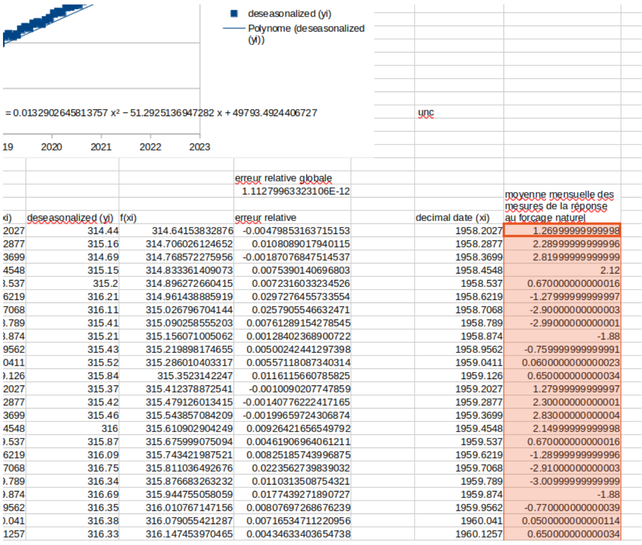
On titre dans la colonne `V` une nouvelle colonne "`moyenne mensuelle des mesures de la réponse au forçage naturel`" et on s'apprête à saisir dans sa première ligne la formule « `= D42 - E42` ».



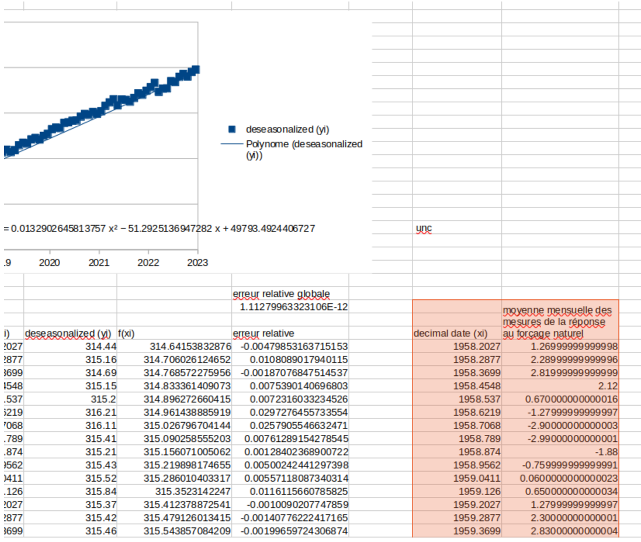
On obtient la moyenne mensuelle à la date `1958,2027` des mesures de la réponse au forçage naturel.



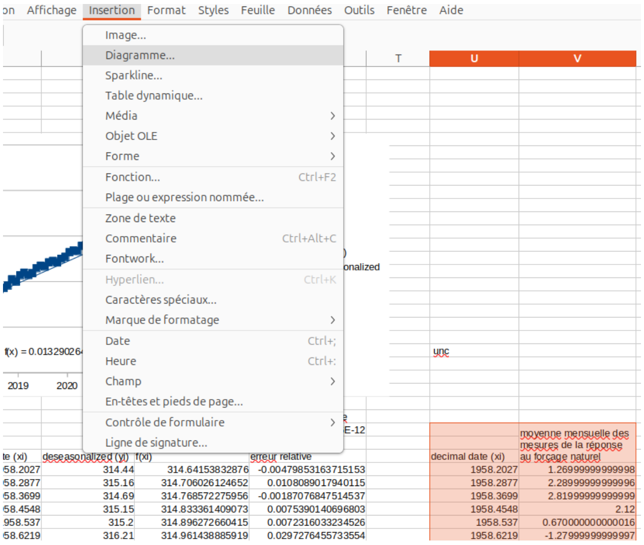
On s'apprête à utiliser la poignée de saisie pour calculer la moyenne mensuelle des mesures de la réponse au forçage naturel à chacune des dates où on a relevé des mesures.



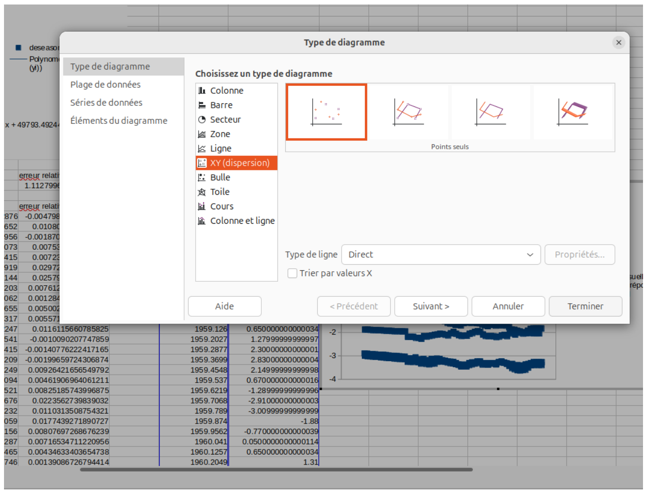
On obtient la moyenne mensuelle des mesures de la réponse au forçage naturel à chacune des dates où on a relevé des mesures.



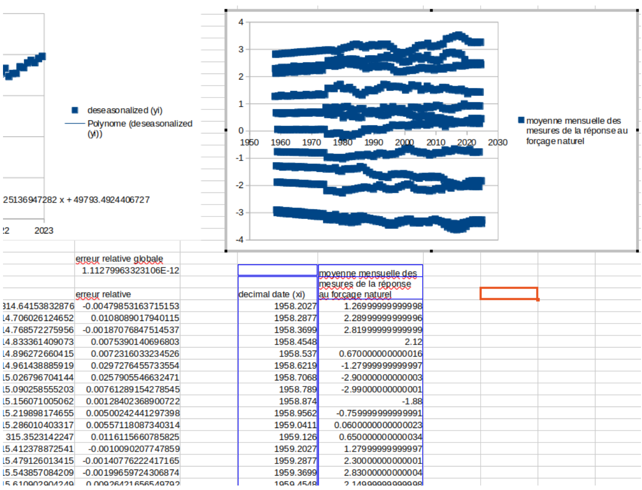
On sélectionne les cellules des colonnes U et V contenant les titres "`decimal date`" et "`moyenne mensuelle des mesures de la réponse au forçage naturel`" et les cellules contenant les données correspondantes.



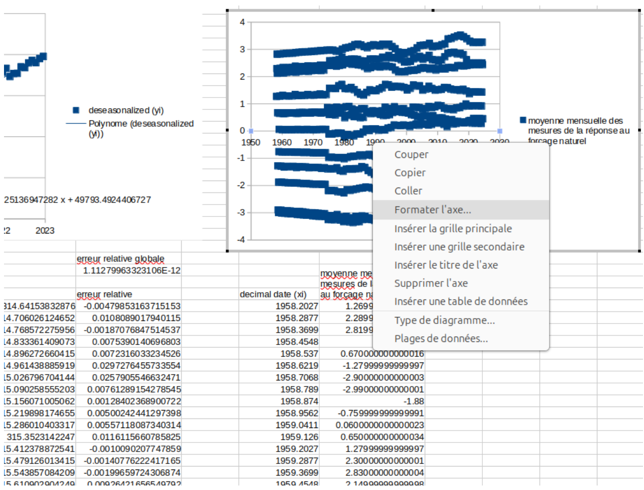
On s'apprête à sélectionner l'item "`Diagramme`" du menu déroulant "`Insertion`".



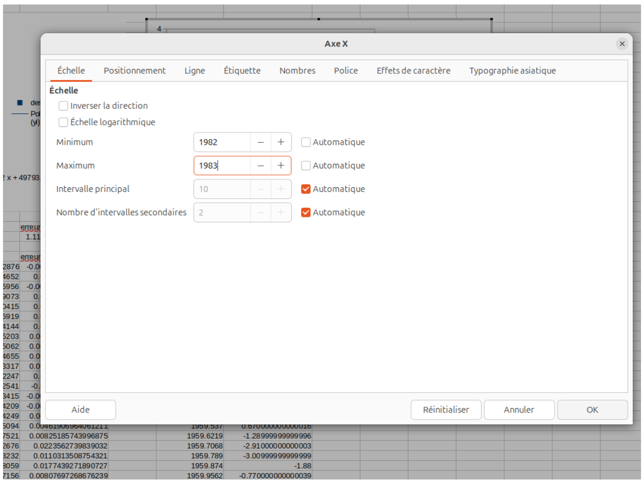
On sélectionne le type de diagramme "`XY(dispersion)`" pour représenter cette série statistique double avec un nuage de points.



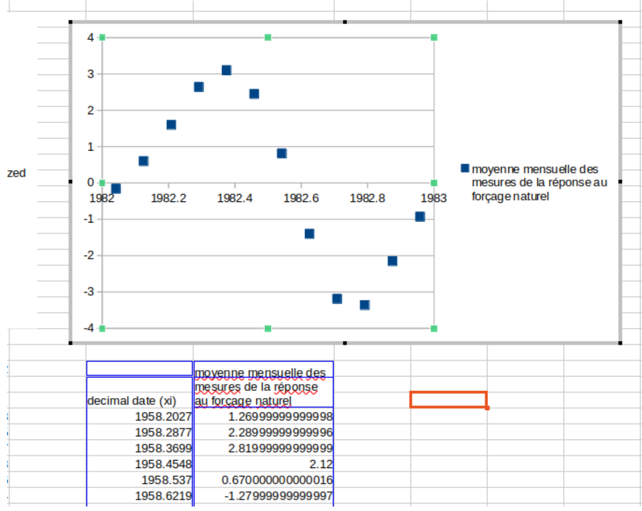
On obtient un nuage de points qui ressemble à plusieurs courbes « épaisses » car les points sont peu espacés sur cette représentation et car leurs ordonnées sont des mesures d'une grandeur qui oscille.



On sélectionne avec un clic droit l'axe des abscisses et on s'apprête à sélectionner l'item "`Formater l'axe...`" du menu qui apparaît.



Dans l'onglet "Échelle" de la fenêtre qui apparaît, on désactive l'option "Automatique" correspondant aux champs de saisie étiquetés "Minimum" et "Maximum" pour leur soumettre respectivement les valeurs 1982 et 1983.

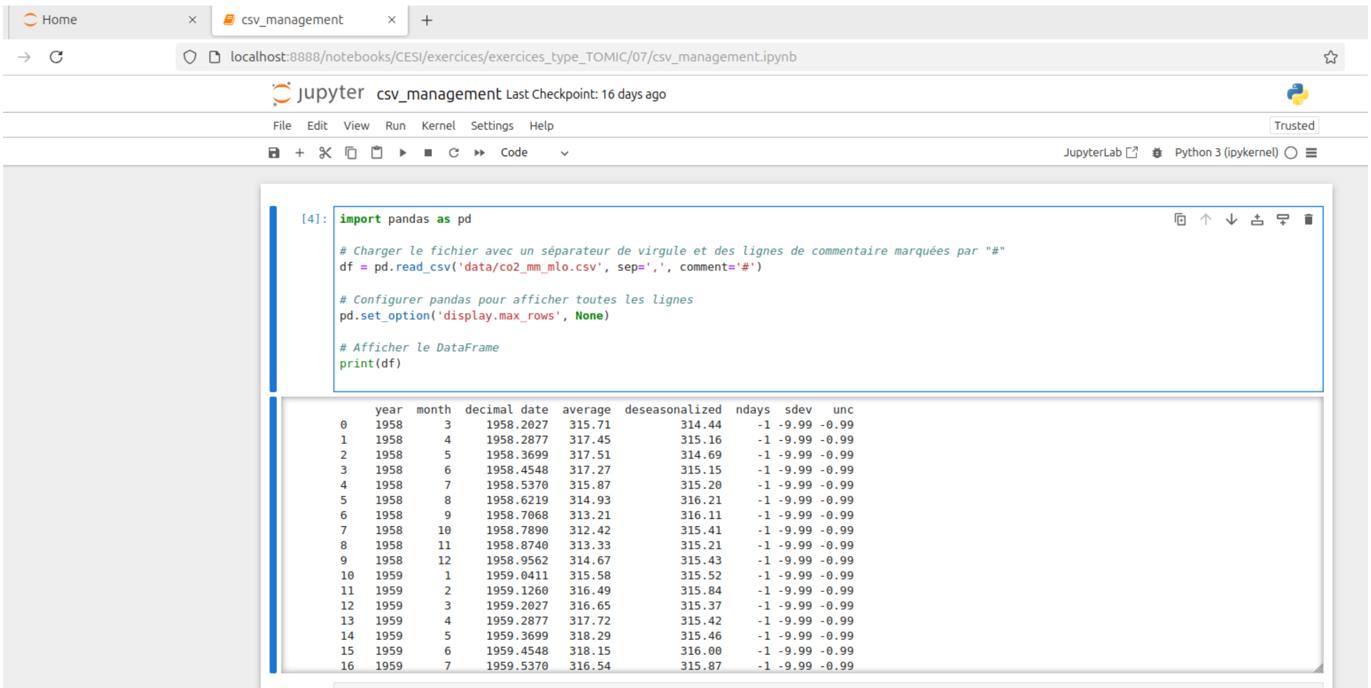


Après avoir cliqué sur le bouton "OK", on obtient les points du nuage susmentionné qui ont une abscisse comprise entre 1982 et 1983.

7. Après avoir enregistré le fichier co2_mm_mlo.csv dans le répertoire data, on écrit le code suivant (fourni dans l'énoncé) dans un fichier de format ipynb enregistré dans le répertoire courant puis on le fait exécuter par *Jupyter* :

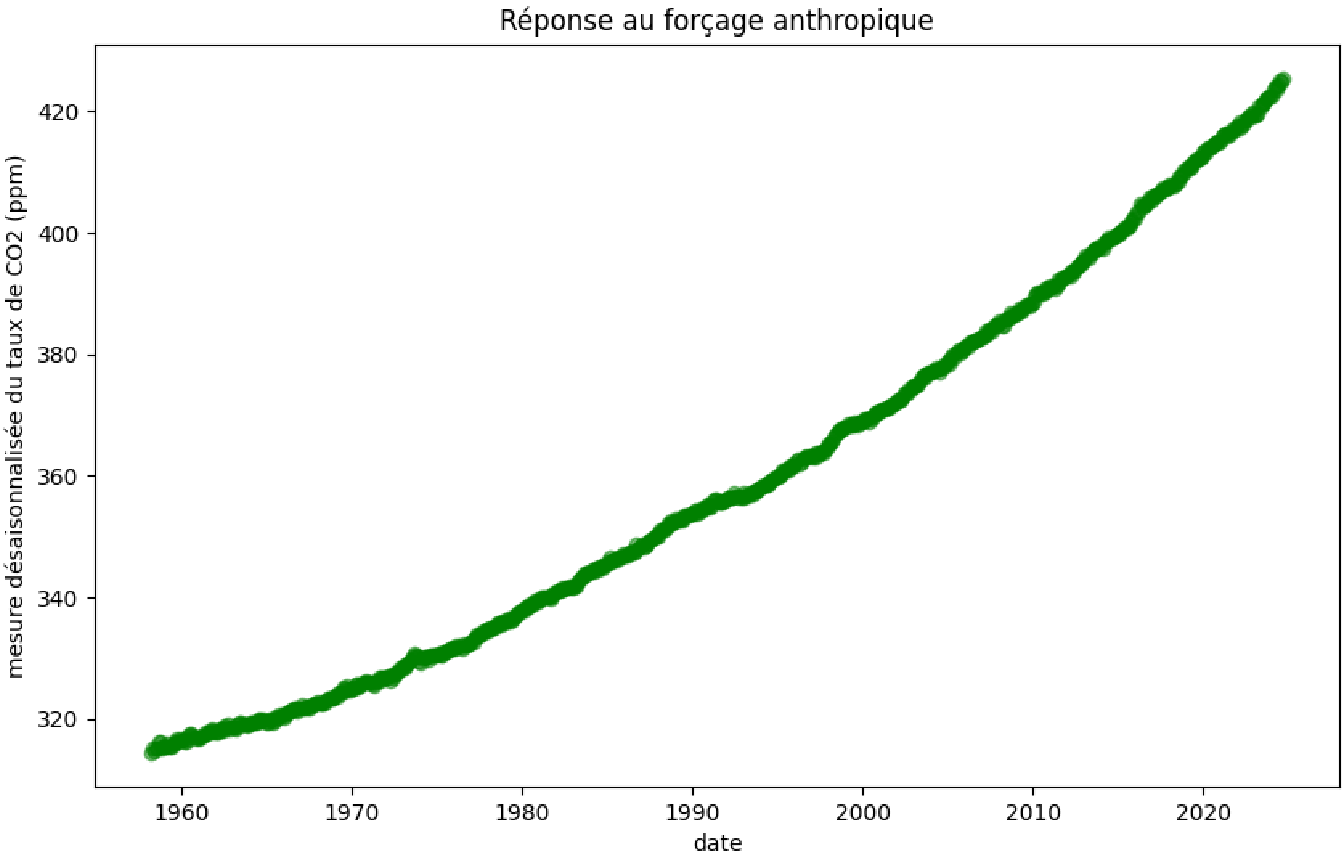
```python
import pandas as pd

# Charger le fichier avec un séparateur de virgule et des lignes de commentaire marquées pa
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')

# Configurer pandas pour afficher toutes les lignes
pd.set_option('display.max_rows', None)

# Afficher le DataFrame
print(df)
```

Via la fonction read_csv du module *Pandas*, ce programme récupère dans la variable df toute l'information contenue dans le fichier co2_mm_mlo.csv puis affiche la valeur de cette variable via la fonction print :



8. Via le code *Python* suivant, on trace le nuage de points représentant la réponse au forçage anthropique (déjà tracé dans la feuille de calcul à la question 3)) :

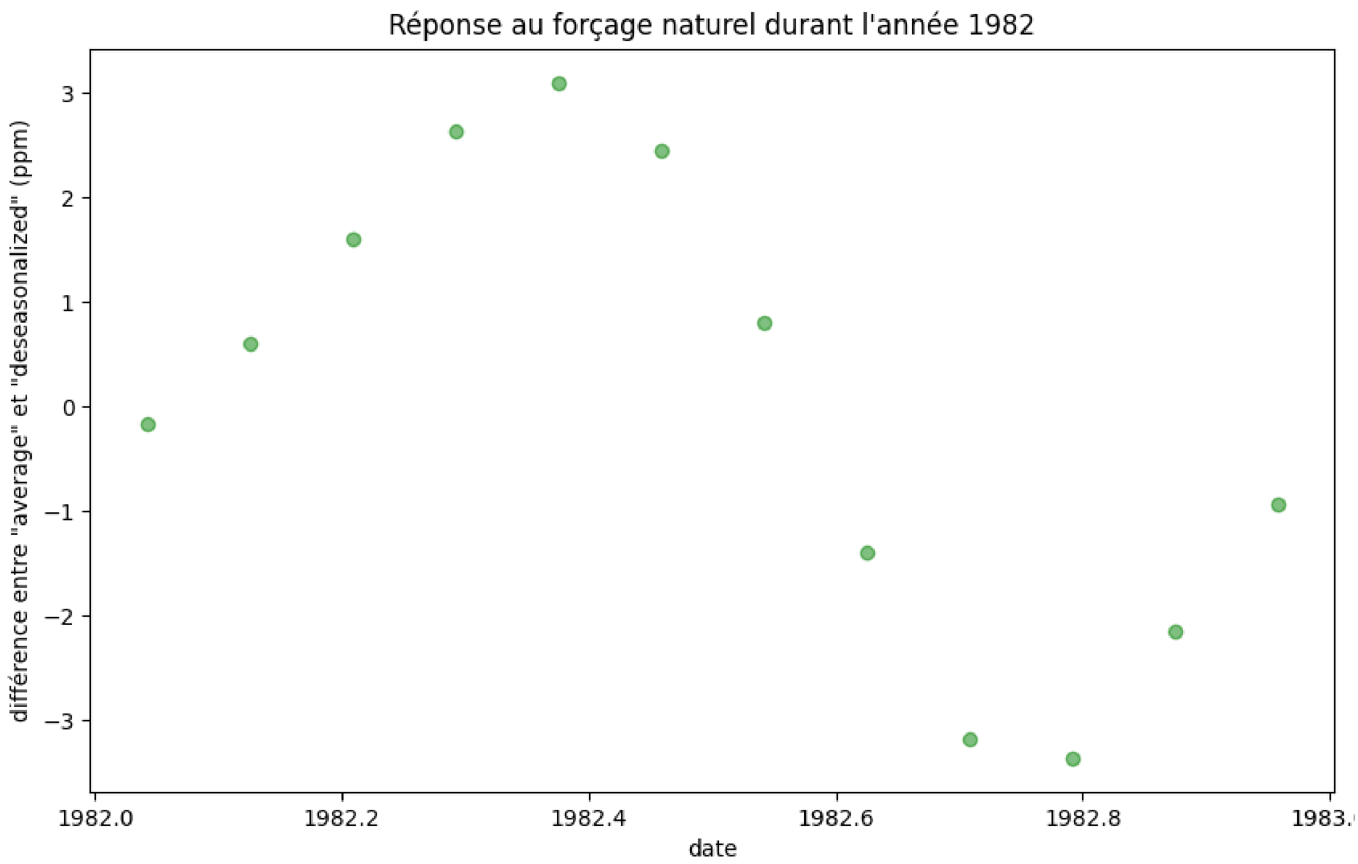
```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# charger le fichier CSV en indiquant le séparateur et les lignes de commentaire
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')

# tracer le nuage de points avec "date" en abscisse et
# "mesure désaisonnalisée du taux de CO2" en ordonnée
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(df['decimal date'], df['deseasonalized'], color='green', alpha=0.5)
plt.xlabel('date')
plt.ylabel('mesure désaisonnalisée du taux de CO2 (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage anthropique')
plt.show()
```



Via le code *Python* suivant, on trace le nuage de points représentant la réponse au forçage naturel durant l'année 1982 (déjà tracé dans la feuille de calcul à la question 6)) :

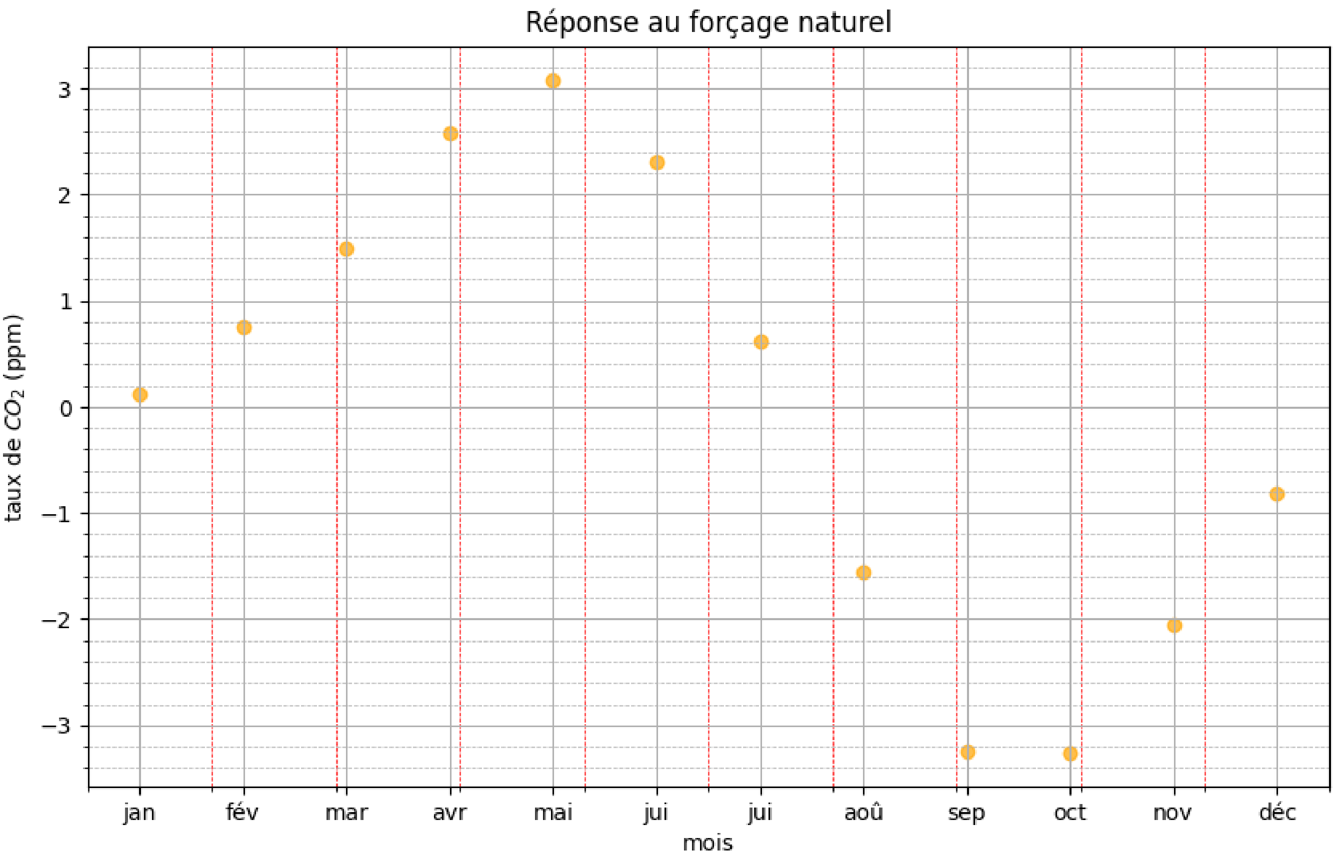
```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# charger le fichier CSV en indiquant le séparateur et les lignes de commentaire
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']

# filtrer les données pour ne conserver que celles entre 1982 et 1983
filtered_df = df[(df['decimal date'] >= 1982) & (df['decimal date'] <= 1983)]

# tracer le nuage de points avec "date" en abscisse et
# "différence entre "average" et "deseasonalized" (ppm)" en ordonnée
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(
    filtered_df['decimal date'],
    filtered_df['average_minus_deseasonalized'],
    color='green',
```

```
    alpha=0.5
)
plt.xlabel('date')
plt.ylabel('différence entre "average" et "deseasonalized" (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel durant l\'année 1982')
plt.show()
```



9. On exécute le code *Python* suivant fourni par l'énoncé :

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']
monthly_means = df.groupby(df['month'])['average_minus_deseasonalized'].mean()
x_ticks = (np.arange(1, 13) - 0.5) / 12
x_labels = ['jan', 'fév', 'mar', 'avr', 'mai', 'jui',
            'jui', 'aoû', 'sep', 'oct', 'nov', 'déc']
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(x_ticks, monthly_means, color='orange', alpha=0.7)
plt.xticks(x_ticks, x_labels)
plt.xlim(0, 1)
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth=0.75)
plt.minorticks_on()
plt.grid(which='minor', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.gca().xaxis.set_minor_locator(plt.MultipleLocator(0.1))
ax = plt.gca()
ax.xaxis.grid(True, which='minor', color='red', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.xlabel('mois')
plt.ylabel(r'taux de $CO_2$ (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel')
plt.show()
```



Ce code affiche le nuage de points correspondant à la moyenne pour chaque mois (de toutes les années disponibles dans les données) afin de stabiliser les variations. En effet, en prenant la moyenne sur plusieurs années pour chaque mois, on réduit l'impact des anomalies ou des variations spécifiques à une année particulière.

L'approximation par une fonction cosinusoïdale du nuage de points obtenu après stabilisation des variations par prise de la moyenne pour chaque mois plutôt que l'approximation du nuage précédent n'impliquant que les données de l'année 1982 est plus représentative des comportements moyens du système climatique saisonnier à Mauna Loa sur plusieurs années. Cela réduit le bruit statistique et les variations dues à des événements spécifiques à court terme, permettant une meilleure estimation des caractéristiques de cette fonction cosinusoïdale (l'amplitude, la pulsation propre et la phase initiale). En utilisant des données moyennes, on s'assure que l'approximation cosinusoïdale capture les véritables tendances cycliques du CO_2 sans être faussée par des anomalies isolées.

De plus, cette subdivision au dixième facilite la lecture graphique du décalage temporel de cette fonction cosinusoïdale (pour en déduire sa phase initiale).

Comme les variations saisonnières ont un cycle de 1 an et que l'unité de temps considérée est l'année, on a la période T de l'approximation cosinusoïdale :

$$T = 1$$

On en déduit la fréquence angulaire ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi}$$

On estime par lecture graphique l'amplitude A et le décalage temporel s :

$$\boxed{A = 3,02} \qquad \boxed{s = 0,375}$$

On en déduit la phase initiale :

$$\psi = 2\pi - \omega s = 2\pi - 2\pi \times 0,375$$

$$\boxed{\psi = 2\pi\,(1 - 0,375)}$$

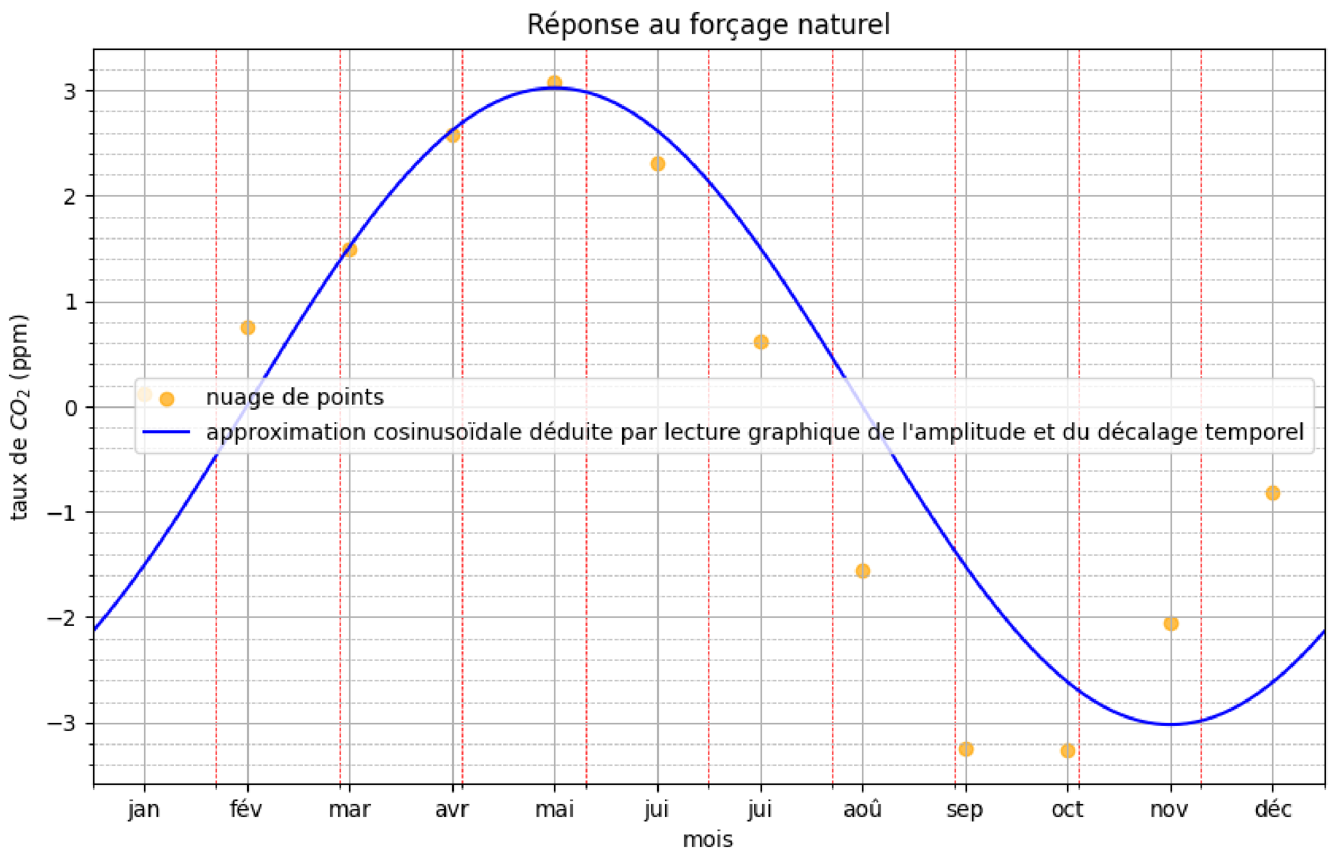
On en déduit l'expression de l'approximation de ce nuage de points par une fonction cosinusoïdale **obtenue par cette lecture graphique** :

$$\boxed{s(t) = \underbrace{3{,}02}_{A\geq 0} \cdot \cos\left(\underbrace{2\pi}_{\omega>0} \cdot t + \underbrace{2\pi\,(1-0{,}375)}_{\Psi\in[0;2\pi[}\right)}$$

On exécute maintenant le code suivant pour tracer cette approximation et calculer puis afficher son erreur relative globale :

```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# chargement des données et préparation
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']
monthly_means = df.groupby(df['month'])['average_minus_deseasonalized'].mean()
x_ticks = (np.arange(1, 13) - 0.5) / 12
x_labels = ['jan', 'fév', 'mar', 'avr', 'mai', 'jui',
            'jui', 'aoû', 'sep', 'oct', 'nov', 'déc']

# paramètres de la fonction cosinusoïdale
A = 3.02
omega = 2 * np.pi
phi = 2 * np.pi * (1 - 0.375)

# création de la courbe cosinusoïdale pour l'affichage
t = np.linspace(0, 1, 1000)
predicted_values_smooth = A * np.cos(omega * t + phi)
predicted_values_at_ticks = A * np.cos(omega * x_ticks + phi)

# configuration du graphique
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(
    x_ticks,
    monthly_means,
    color='orange',
    alpha=0.7,
    label='nuage de points'
) # données observées
plt.plot(
    t,
    predicted_values_smooth,
    color='blue',
    label='approximation cosinusoïdale déduite par lecture graphique \
de l\'amplitude et du décalage temporel'
) # courbe cosinusoïdale
plt.xticks(x_ticks, x_labels)
plt.xlim(0, 1)
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth=0.75)
plt.minorticks_on()
plt.grid(which='minor', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.gca().xaxis.set_minor_locator(plt.MultipleLocator(0.1))
ax = plt.gca()
ax.xaxis.grid(True, which='minor', color='red', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.xlabel('mois')
plt.ylabel(r'taux de $CO_2$ (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel')
plt.legend()
plt.show()

# calcul de l'erreur relative globale
errors = np.abs(monthly_means - predicted_values_at_ticks) / monthly_means
```

```
global_relative_error = np.mean(errors)
print("L'erreur relative globale est : {:.2%}".format(global_relative_error))
```




```
L'erreur relative globale est : 102.94%
```

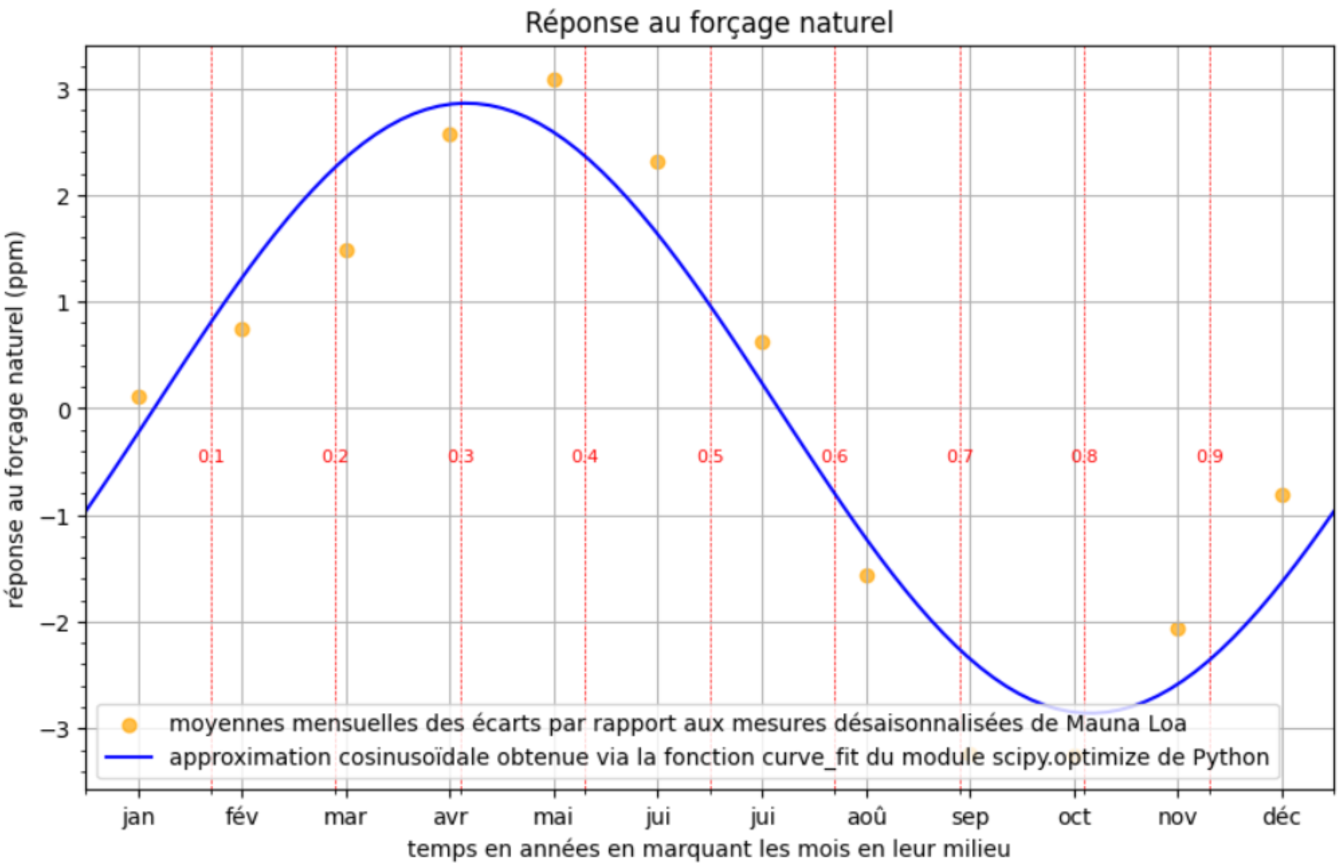
On obtient une erreur relative globale de 102,94 %.
Cette valeur représente l'écart moyen relatif entre les valeurs mesurées de la réponse au forçage naturel et celles prédites par la fonction cosinusoïdale. Les valeurs prédites par la fonction sont donc, en moyenne, environ équivalentes aux mesures qu'elles modélisent, ce qui indique une erreur relative globale d'environ 100 %. Cette grande erreur relative suggère que le modèle cosinusoïdal **obtenu par cette lecture graphique** n'est pas précis.

10. On exécute le code suivant pour calculer l'approximation cosinusoïdale de ce nuage de points avec la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python*, la tracer, afficher une de ses expressions, calculer son erreur relative globale et l'afficher :

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']
monthly_means = df.groupby(df['month'])['average_minus_deseasonalized'].mean()
x_ticks = (np.arange(1, 13) - 0.5) / 12
x_labels = ['jan', 'fév', 'mar', 'avr', 'mai', 'jui',
            'jui', 'aoû', 'sep', 'oct', 'nov', 'déc']

def cos_function(x, A, phi, C):
    return A * np.cos(2 * np.pi * x + phi) + C

# ajustement des paramètres de la fonction cosinusoïdale
params, _ = curve_fit(cos_function, x_ticks, monthly_means)
A, phi, C = params

# correction de l'amplitude et de la phase si "amplitude négative"
if A < 0:
    A = -A
```

```
    phi += np.pi

# normaliser la phase pour rester dans [0, 2*pi[
phi = phi % (2 * np.pi)

# générer les valeurs de l'interpolation avec les paramètres ajustés
x_fit = np.linspace(0, 1, 100)
y_fit = cos_function(x_fit, A, phi, C)

# tracer le nuage de points et l'interpolation par la fonction cosinusoïdale
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(
    x_ticks,
    monthly_means,
    color='orange',
    alpha=0.7,
    label='moyennes mensuelles des écarts par rapport aux mesures \
désaisonnalisées de Mauna Loa'
)
plt.plot(
    x_fit,
    y_fit,
    color='blue',
    label='approximation cosinusoïdale obtenue via la \
fonction curve_fit du module scipy.optimize de Python'
)

# configurer des labels des mois et des labels mineurs
plt.xticks(x_ticks, x_labels)
plt.xlim(0, 1)
x_ticks_dixieme = np.arange(0.1, 1.0, 0.1)
x_labels_dixieme = [f"{i:.1f}" for i in x_ticks_dixieme]
for i, label in zip(x_ticks_dixieme, x_labels_dixieme):
    plt.text(i, -0.5, label, ha='center', color='red', fontsize=8)

# ajout de quadrillage et configuration des axes
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth=0.75)
plt.minorticks_on()
plt.gca().xaxis.set_minor_locator(plt.MultipleLocator(0.1))
plt.gca().xaxis.grid(
    True,
    which='minor',
    color='red',
    linestyle='--',
    linewidth=0.5
)
plt.xlabel('temps en années en marquant les mois en leur milieu')
plt.ylabel('réponse au forçage naturel (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel')
plt.legend()
plt.show()

# afficher expression de la fonction cosinusoïdale avec amplitude positive
print(f"L'expression de la fonction cosinusoïdale est : f(x) = {A:.2f} * \
cos(2π * x + {phi:.2f}) + {C:.2f}")

# calcul des valeurs prédites pour les mêmes points de
# temps que les données réelles
predicted_values = cos_function(x_ticks, A, phi, C)

# calcul des erreurs relatives pour chaque point de données
errors = np.abs(monthly_means - predicted_values) / np.abs(monthly_means)
```

```
# calcul de l'erreur relative globale
global_relative_error = np.mean(errors)
print("L'erreur relative globale est : {:.2%}".format(global_relative_error))
```




```
L'expression de la fonction cosinusoïdale est : f(x) = 2.86 * cos(2π * x + 4.37) + 0.00
L'erreur relative globale est : 61.03%
```

Avec la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python*, on obtient maintenant une erreur relative globale de 61,03 %.
Bien qu'une telle erreur relative globale montre une amélioration par rapport à l'erreur de 102,94 % obtenue précédemment à partir d'une lecture graphique, elle reste élevée.

11. D'après la question précédente, la fonction cosinusoïdale approchant la réponse au forçage naturel admet l'expression suivante :

$$\boxed{s(t) = 2{,}86 \;.\; \cos(2\pi \;.\; t + 4{,}37)}$$

- Son amplitude est 2,86.
- Sa pulsation propre est 2π.
- Sa fréquence est 1.
- Sa phase initiale est 4,37.

12. Comme la pulsation propre de la modélisation de la réponse au forçage naturel est 2π, alors l'équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants qui modélise le forçage naturel est :

$$y'' + 4\pi^2 \;.\; y = 0$$

13. À la question 4), on a obtenu la modélisation polynomiale de degré 2 de la réponse au forçage anthropique suivante :

$$\boxed{f(t) = 0{,}0132902645813757 . t^2 - 51{,}2925136947282 . t + 49793{,}4924406727}$$

À la question 11), on a obtenu la modélisation cosinusoïdale de la réponse au forçage naturel suivante :

$$\boxed{s(t) = 2{,}86 \;.\; \cos(2\pi \;.\; t + 4{,}37)}$$

On obtient donc la modélisation m suivante pour l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère :

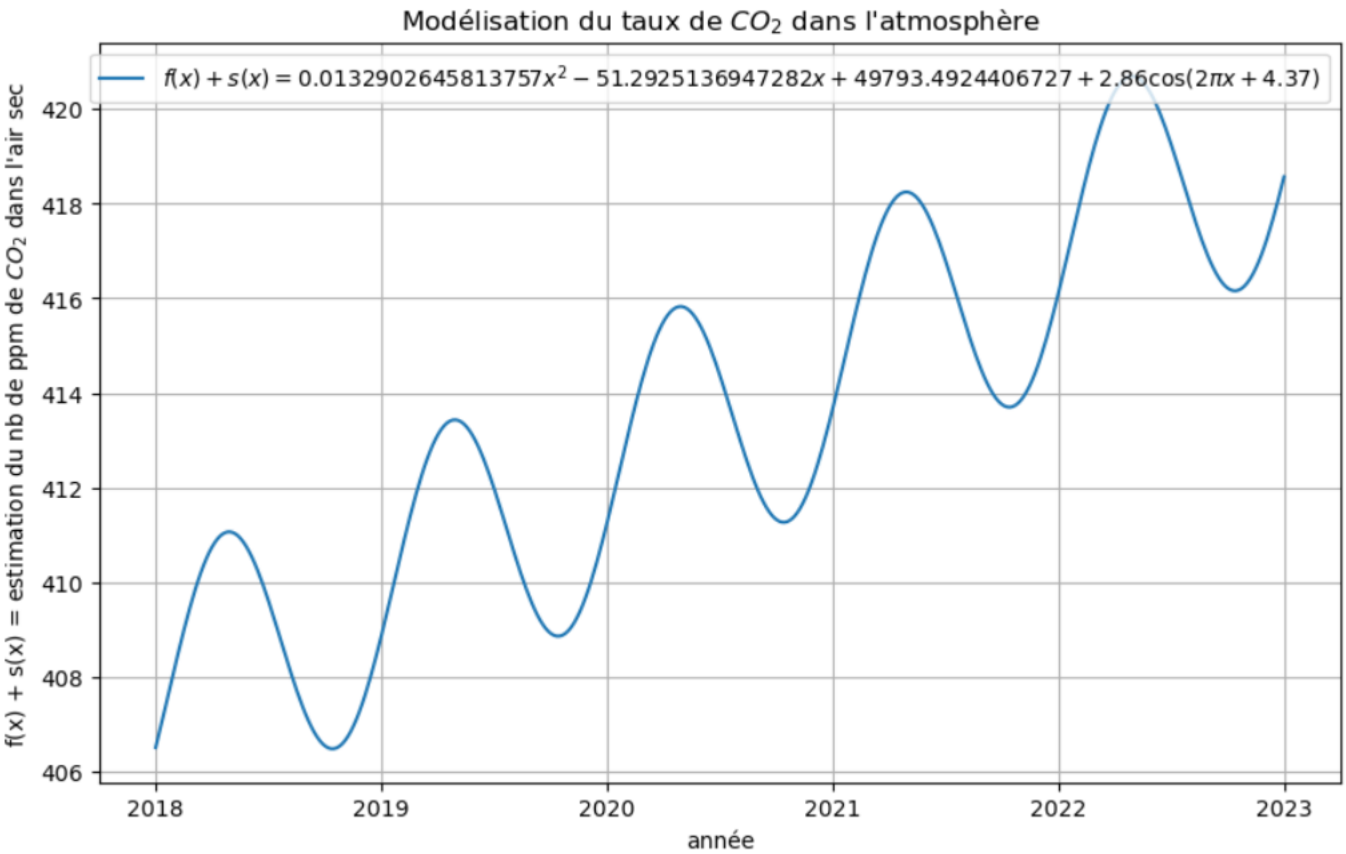
$$m(t) = s(t) + f(t)$$

$$= 2,86\ .\ \cos(2\pi\ .\ t + 4,37) + 0,0132902645813757.t^2 - 51,2925136947282.t + 49793,4924406727$$

$$\boxed{m(t) = 2,86\ .\ \cos(2\pi\ .\ t + 4,37) + 0,0132902645813757.t^2 - 51,2925136947282.t + 49793,4924406727}$$

On trace alors cette modélisation de l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère via le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(2018, 2023, 400)
f_x = (0.0132902645813757 * x**2
       - 51.2925136947282 * x
       + 49793.4924406727
       + 2.86 * np.cos(2 * np.pi * x + 4.37))
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(
    x,
    f_x,
    label='$f(x) + s(x) = 0.0132902645813757x^2 - \
51.2925136947282x + 49793.4924406727 '
    r'+ 2.86\cos(2\pi x + 4.37)$')
plt.title(r"Modélisation du taux de $CO_2$ dans l'atmosphère")
plt.xlabel('année')
plt.ylabel(r"f(x) + s(x) = estimation du nb de ppm de $CO_2$ "
           r"dans l'air sec")
plt.xticks(np.arange(2018, 2024, step=1))
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



14. D'après la question 12), la modélisation s de la réponse au forçage naturel est solution de l'équation :

$$y'' + 4\pi^2\ .\ y = 0$$

Il s'agit de l'équation homogène associée à l'équation $y'' + 4\pi^2 \, . \, y = g$ recherchée.
Il ne reste donc qu'à déterminer son second membre g.
$m = s + f$ est une solution particulière de l'équation $y'' + 4\pi^2 \, . \, y = g$ recherchée.
Comme s est une solution de son équation homogène associée, alors f est une solution de l'équation $y'' + 4\pi^2 \, . \, y = g$ recherchée.
Donc :

$$f'' + 4\pi^2 \, . \, f = g$$

Pour déterminer g, on commence donc par calculer f' et f''.
Pour simplifier les écritures, on note ses coefficients comme suit :

$$\begin{cases} a = 0{,}0132902645813757 \\ b = -51{,}2925136947282 \\ c = 49793{,}4924406727 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= at^2 + bt + c \\ f'(t) &= 2at + b \\ f''(t) &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f''(t) + 4\pi^2 . f(t) \\ &= 2a + 4\pi^2 . \left(at^2 + bt + c\right) \\ &= 4\pi^2 at^2 + 4\pi^2 bt + \left(4\pi^2 c + 2a\right) \end{aligned}$$

L'équation dont la modélisation m de l'évolution du taux de CO_2 dans l'atmosphère est solution est donc :

$$\boxed{y'' + 4\pi^2 \, . \, y = 4\pi^2 at^2 + 4\pi^2 bt + \left(4\pi^2 c + 2a\right)}$$

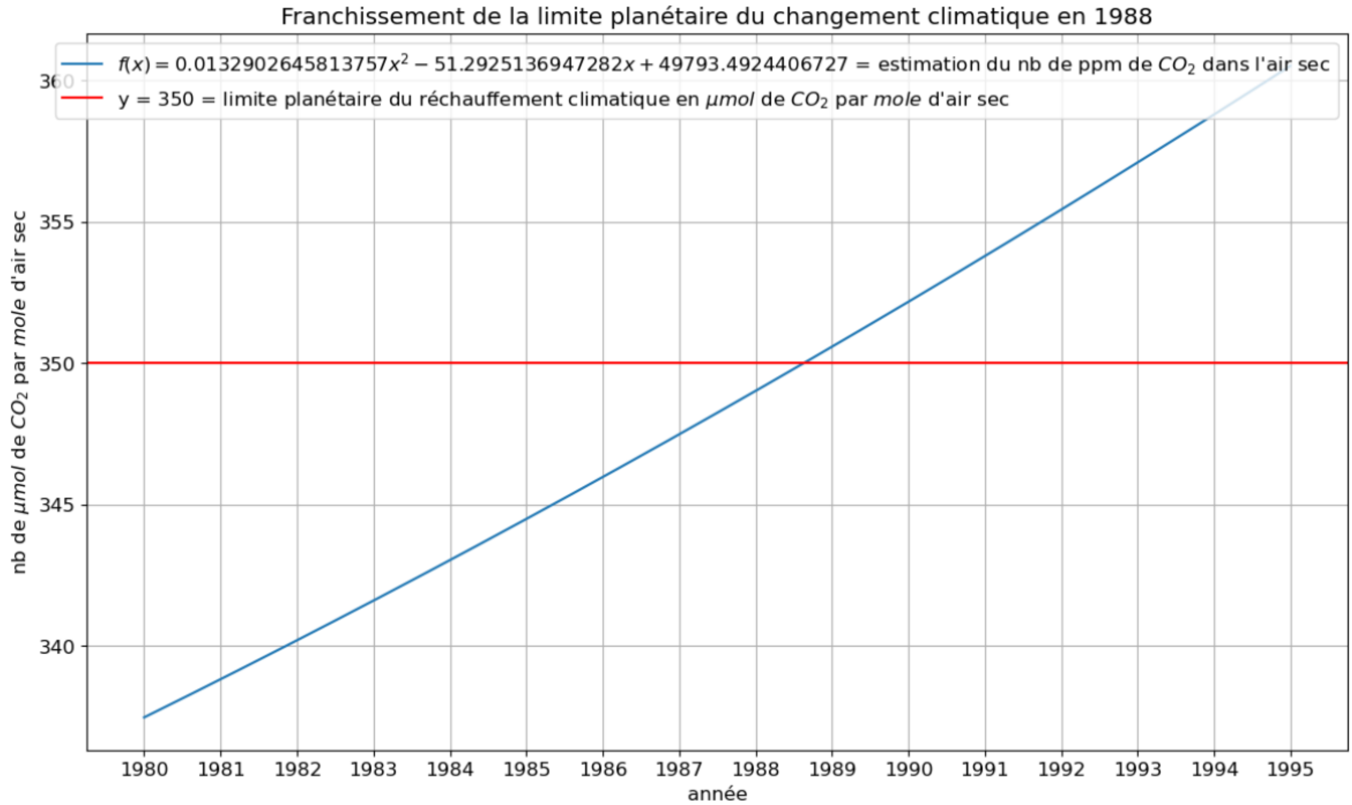
15. D'après la question précédente, la modélisation g du forçage anthropique admet pour expression la suivante :

$$g(t) = 4\pi^2 0{,}0132902645813757 t^2 - 4\pi^2 51{,}2925136947282 t + \left(4\pi^2 49793{,}4924406727 + 20{,}0132902645813757\right)$$

16. En estimant la taux de CO_2 dans l'atmosphère avec la réponse au forçage anthropique, le code suivant montre que la limite planétaire du changement climatique a été franchie selon cette modélisation au cours de l'année 1988 :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams.update({'font.size': 12})
x = np.linspace(1980, 1995, 1000)
f_x = (0.0132902645813757 * x**2
       - 51.2925136947282 * x
       + 49793.4924406727)

# configuration du graphique
plt.figure(figsize=(14, 8))
plt.plot(
    x,
    f_x,
    label="$f(x) = 0.0132902645813757x^2 - 51.2925136947282x + \
49793.4924406727$ = estimation du nb de ppm de $CO_2$ dans l'air sec")

# ajout d'une ligne horizontale pour la limite planétaire du
# réchauffement climatique
plt.axhline(
    y=350,
    color='r',
    linestyle='-',
    label="y = 350 = limite planétaire du réchauffement \
climatique en $\mu mol$ de $CO_2$ par $mole$ d'air sec"
)
```

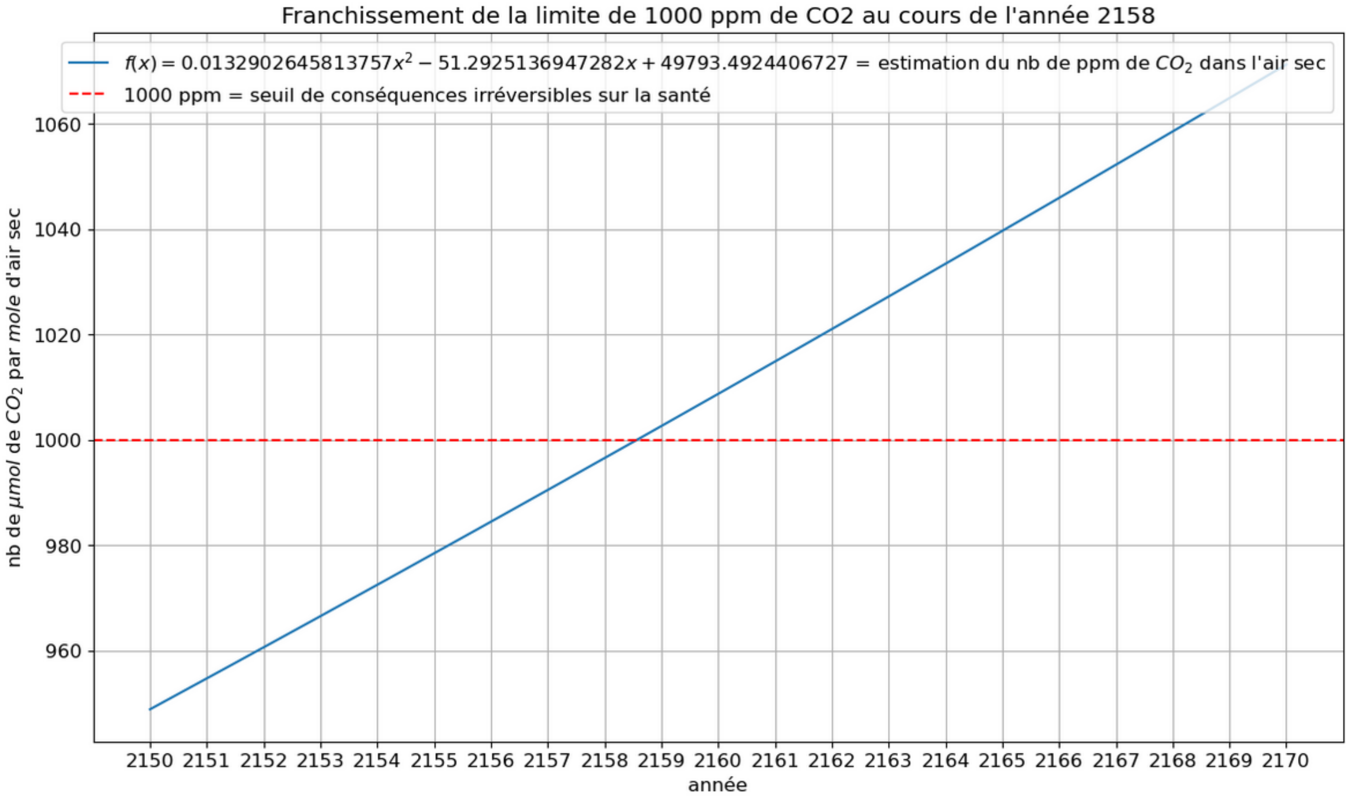
```
# ajout de titres et étiquettes
plt.title('Franchissement de la limite planétaire du changement \
climatique en 1988')
plt.xlabel('année')
plt.ylabel(r"nb de $\mu mol$ de $CO_2$ par $mole$ d'air sec")

# configuration des marques sur l'axe des x
plt.xticks(np.arange(1980, 1996, step=1))

# activation de la grille pour une meilleure lisibilité
plt.grid(True)

# affichage de la légende
plt.legend()

# affichage du graphique
plt.show()
```



17. En estimant la taux de CO_2 dans l'atmosphère avec la réponse au forçage anthropique, le code suivant montre que selon cette modélisation l'air aura des conséquences irréversibles sur la santé au cours de l'année 2158 :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams.update({'font.size': 12})
x = np.linspace(2150, 2170, 1000)  # période de 2150 à 2170
f_x = (0.0132902645813757 * x**2
       - 51.2925136947282 * x
       + 49793.4924406727)

plt.figure(figsize=(14, 8))
plt.plot(x, f_x, label="$f(x) = 0.0132902645813757x^2 - 51.2925136947282x \
+ 49793.4924406727$ = estimation du nb de ppm de $CO_2$ dans l'air sec")

# ajout d'une ligne horizontale pour le seuil critique de 1000 ppm
plt.axhline(
    y=1000,
```

```
        color='r',
        linestyle='--',
        label="1000 ppm = seuil de conséquences irréversibles sur la santé"
    )

plt.title('Franchissement de la limite de 1000 ppm de CO2 au cours de l\'année 2158')
plt.xlabel('année')
plt.ylabel(r"nb de $\mu mol$ de $CO_2$ par $mole$ d'air sec")

plt.xticks(np.arange(2150, 2171, step=1))
plt.grid(True)

plt.legend()
plt.show()
```



3 Sources

- article « Qu'est-ce qu'un forçage climatique ? » de David Saint-Martin et Olivier Boucher sur www.climat-en-questions.fr à l'url https://www.climat-en-questions.fr/reponse/forcage-climatique-par-david-saint-martin-olivier-boucher
- courbe de Keeling illustrant la concentration mensuelle moyenne de CO2 mesurée à l'Observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de CO2 dans l'atmosphère terrestre depuis 1958 sur Wikimedia Commons à l'url `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Mauna_Loa_CO2_monthly_mean_concentration_FR.svg`
- article « Les 9 limites planétaires » sur agence-lucie.com à l'url `https://agence-lucie.com/limites-planetaires`
- page du « Global Monitoring Laboratory » proposant des données relatives aux mesures des taux de CO_2, de CH_4, de N_2O et de SF_6 enregistrées depuis le volcan Mauna Loa dans l'île de Hawaï à l'url `https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html`
- page de données textuelles des mesures mensuelles de CO2 à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « noaa logo Global Monitoring Laboratory » à l'url `https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.txt`
- fichier de données au format CSV (Comma-separated values) des mesures mensuelles de CO2 à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « Global Monitoring Laboratory » à l'url `https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.txt`
- page de documentation concernant la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python* sur la documention officielle en ligne du module *Scipy* à l'url `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html`
- article « PPM : à quoi correspond cette unité de mesure de la pollution ? » sur le site offciel du magazine *Geo* à l'url `https://www.geo.fr/environnement/ppm-a-quoi-correspond-cette-unite-de-mesure-de-la-pollution-193340`