EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LA DÉCOMPOSION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

S. Labopin

Table des matières

1 Conventions et abus de langage de ce document

Dans tout ce document :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On utilise parfois la notation $f(x)$ pour désigner la fonction f (alors que cette notation désigne normalement l'image de x par la fonction f, c'est-à-dire le nombre auquel la fonction f fait correspondre le nombre x).
Par exemple, « x^2+1 » peut désigner la fonction $x \mapsto x^2+1$ et non un nombre x^2+1 où x est aussi un nombre.
- On confond un polynôme avec la fonction polynomiale correspondante (Ces notions sont définies dans ce document).
- On confond une fraction rationnelle avec la fonction rationnelle correspondante (Ces notions sont définies dans ce document).

2 Arithmétique des polynômes

2.1 Définition de $\mathbb{K}[X]$

Définition (Fonctions polynomiales et polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$).

- On appelle **fonction polynomiale** une fonction f de la forme suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

avec d un entier positif et $a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_d \neq 0$

- Dans la définitions précédente :
  - Les nombres (réels ou complexes suivant que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont appelés **les coefficients de la fonction polynomiale** f.
  - Le nombre entier d est appelé **le degré de la fonction polynomiale** f et on le note $\deg(f)$.

⚠ Une fonction polynomiale n'est pas un polynôme mais, dans le cas où les coefficients sont des nombres réels ou complexes (comme ce sera toujours le cas dans ce document), **à chaque polynôme il correspond une unique fonction polynomiale et inversement**. C'est pourquoi on confond dans ce document un polynôme avec la fonction polynomiale associée.
Dans la définition précédente, le polynôme associé à la fonction polynomiale f est la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces coefficients en notant $a_k = 0 \ \forall \ k > d$.
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est en fait une suite d'élements de $\mathbb{K}$ qui est nulle à partir d'un certain rang (ici c'est à partir du rang $d+1$: $a_k = 0 \ \forall \ k \geq d+1$).
On commettra alors un abus de langage en écrivant parfois « le polynôme f » en faisant référence à la fonction polynomiale f et non au polynôme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

⚠ **On commettra encore un abus de langage en écrivant parfois « $\mathbb{K}[X]$ » en faisant référence à l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales à coefficients dans** $\mathbb{K}$ (plutôt qu'à l'ensemble des suites 0-stationnaires d'élements de $\mathbb{K}$)**.**

Exemples (et conventions et abus de langage complémentaires) (Polynômes, coefficients et degré d'un polynôme.)

- Les fontions suivantes sont des fonctions polynomiales :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7x^5+7x^3-9x+1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & 7x^5+7x^3-9x+1 \end{array} \qquad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \qquad k: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & ix \end{array}$$

- Les polynômes associés à ces fonctions polynomiales sont respectivement les suites 0-stationnaires suivantes :
  - $1\,;\,-9\,;\,0\,;\,7\,;\,0\,;\,7\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\ldots$
  - $1\,;\,-9\,;\,0\,;\,7\,;\,0\,;\,7\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\ldots$
  - $0\,;\,0\,;\,0\,;\ldots$
  - $0\,;\,i\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\ldots$
- $f\in\mathbb{R}[X]$, $g\in\mathbb{C}[X]$, $h\in\mathbb{R}[X]$, $k\in\mathbb{C}[X]$

  ⚠ **On se permet aussi les abus de langage comme $f = g$.** On peut considérer par exemple qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ mais que les parties imaginaires de ses coefficients sont nulles en écrivant par exemple « $x^2+1\in\mathbb{C}[X]$ ».

- $\deg(f)=5$, $\deg(g)=5$, $\deg(k)=1$

  ⚠ Par convention, on dit que **le degré du polynôme nul** h **est** $-\infty$ et on écrit « $\deg(h)=-\infty$ ». La définition précédente souffrait de cette lacune en ne couvrant pas ce cas.

2.2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Tout comme chez les nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on parle de diviseurs et de multiples dans $\mathbb{K}[X]$:

Exemples (multiples et diviseurs)

- Dans $\mathbb{Z}$, 2 est **un diviseur** de 6 car $6=3\times 2$ (On dit aussi que 6 est **un multiple** de 2).
- Dans $\mathbb{Z}$, 2 est **un diviseur** de 6 car il existe $q\in\mathbb{Z}$ tel que $6=q\times 2$.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, $x-i$ est **un diviseur** de x^2+1 car $x^2+1=(x+i)\times(x-i)$.
- Dans $\mathbb{C}[X]$, $x-i$ est **un diviseur** de x^2+1 car il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $x^2+1=Q(x)\times(x-i)$.
- Dans $\mathbb{Z}$, 5 **n'est pas un diviseur** de 6 car il n'existe aucun nombre entier relatif q tel que $6=q\times 5$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, x^2+1 **n'a aucun diviseur non constant** (i.e. de degré supérieur ou égal à 1) car il n'existe aucune façon d'écrire x^2+1 sous la forme d'un produit de deux polynômes à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 1.

1) Déterminer un diviseur de x^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$ autre que $x-i$.
2) Quels sont les diviseurs d'un polynôme constant non nul (i.e. de degré 0) dans $\mathbb{K}[X]$?
3) Quels sont les diviseurs du polynôme nul (i.e. de degré $-\infty$) dans $\mathbb{K}[X]$?
4) Déterminer tous les diviseurs de degré 2 de $\left(x^2+1\right)(x-1)$...
   a) ...dans $\mathbb{C}[X]$.
   b) ...dans $\mathbb{R}[X]$.

2.3 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Tout comme chez les nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$, il y a une division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:

Exemples (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

- Quand on veut ranger 16 œufs dans des boîtes de 6, on remplit 2 boîtes complètement puis il reste encore 4 œufs qui ne peuvent pas remplir complètement une troisième boîte de 6 :

$$16 = \underbrace{2 \times 6}_{\text{2 boîtes de 6}} + \underbrace{4}_{\text{Il reste 4 œufs.}}$$

  - On a fait la division euclidienne de 16 par 6.
  - Dans cette **division euclidienne** :
    - 16 est le **dividende**.
    - 6 est le **diviseur**.
    - 2 est le **quotient**.
    - 4 est le **reste**.
  - ⚠ Les égalités « $16 = 3 \times 6 + (-2)$ » et « $16 = 1 \times 6 + 10$ » ne sont pas **la** division euclidienne de 16 par 6 car on n'a ni $0 \leq -2 < 6$ ni $0 \leq 10 < 6$.
  - Comme le reste de la division euclidienne de 16 par 6 est non nul, 6 n'est pas un diviseur de 16. On ne peut pas ranger tous les 16 œufs dans un nombre entier de fois un boîte de 6.
- $99 = 9 \times 11 + 0$ est la division euclidienne de 99 par 11 car $0 \leq 0 < 11$.
  On peut ranger 99 œufs dans 9 boîtes de 11 « sans qu'il en reste ».
- Quand les nombres sont plus grands, on peut poser la division euclidienne comme on le faisait à l'école :

$$\begin{array}{rccccl|ccc}
 & 3 & 7 & 2 & 7 & & 1 & 4 & 3 \\ \cline{7-9}
-(& 2 & 8 & 6 & \downarrow &) & & 2 & 6 \\ \cline{1-4}
 & 0 & 8 & 6 & 7 & & & & \\
-(& 0 & 8 & 5 & 8 &) & & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & 0 & 0 & 9 & & & &
\end{array}$$

Combien il y va de fois 143 dans 372 ? Il y va 2 fois et il reste 86.
On abaisse 7.
Combien il y va de fois 143 dans 867 ? Il y va 6 fois et il reste 9.
Autrement dit, la division euclidienne de 3 727 par 143 est l'égalité suivante :

$$\underbrace{3\,727}_{\text{« 3 727 œufs »}} \underbrace{=}_{\text{« c'est »}} \underbrace{26 \times 143}_{\text{« 26 boîtes de 143 œufs »}} \underbrace{+}_{\text{« et »}} \underbrace{9}_{\text{« il en reste 9 »}}$$

1) *a*) Expliquer pourquoi l'égalité « $17 = 2 \times 6 + 5$ » est la division euclidienne de 17 par 6.
   b) Expliquer pourquoi l'égalité « $17 = 6 \times 2 + 5$ » n'est pas la division euclidienne de 17 par 2.
   c) Écrire la division euclidienne de 17 par 2.

Théorème-définition (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)
Soient n un entier relatif et d un entier relatif non nul.
Alors il existe un unique entier relatif d et un unique entier relatif r tels que :

$$\begin{cases} n = qd + r \\ 0 \leq r < |d| \end{cases}$$

- L'égalité « $n = qd + r$ » telle que $0 \leq r < |d|$ est appelée la division euclidienne de n par d.
- Dans cette égalité :
  - n est appelé le dividende.
  - d est appelé le diviseur.
  - q est appelé le quotient.
  - r est appelé le reste.

2) *a*) Expliquer pourquoi l'égalité « $17 = 3 \times 6 + (-1)$ » n'est pas la division euclidienne de 17 par 6.
   b) Écrire la division euclidienne de -17 par 6.

Concept (Généralisation de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ à la division euclidienne de polynômes à coefficients entiers)

- Penser l'exemple précédent de division euclidienne posée de la façon suivante aurait davantage de sens :

$$\begin{array}{rcccccl|ccc}
 & 3 & 7 & 2 & 7 & & & 1 & 4 & 3 \\ \cline{8-10}
-(& 2 & 8 & 6 & \mathbf{0} &) & & & 2 & 6 \\ \cline{1-5}
 & 0 & 8 & 6 & 7 & & & & & \\
-(& 0 & 8 & 5 & 8 &) & & & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & 0 & 0 & 9 & & & & &
\end{array}$$

Combien il y va de fois $143 \boldsymbol{\times} \mathbf{10^1}$ dans 3727 ? Il y va 2 fois et il reste 867.
Combien il y va de fois $143 \boldsymbol{\times} \mathbf{10^0}$ dans 867 ? Il y va 6 fois et il reste 9.
Ainsi :

$$3\,727 = 2 \times 143 \boldsymbol{\times} \mathbf{10^1} + 6 \times 143 \boldsymbol{\times} \mathbf{10^0} + 9 = \left(\underbrace{2 \times \mathbf{10^1} + 6 \boldsymbol{\times} \mathbf{10^0}}_{26}\right) \times 143 + 9$$

- En se souvenant du sens de l'écriture décimale, on commence à avoir l'idée d'une division euclidienne de polynômes :

$$\begin{aligned}
3\,727 &= 3.10^3 + 7.10^2 + 2.10^1 + 7.10^0 \\
&= 3x^3 + 7x^2 + 2x^1 + 7x^0 \quad \text{avec } x = 10 \\
&= 3x^3 + 7x^2 + 2x + 7 \quad \text{avec } x = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccccl|cc}
 & 3.\mathbf{10^3} & +7.\mathbf{10^2} & +2.\mathbf{10^1} & +7.\mathbf{10^0} & & 1.\mathbf{10^2} \quad +4.\mathbf{10^1} & +3.\mathbf{10^0} \\ \cline{7-8}
-(& 2.\mathbf{10^3} & +8.\mathbf{10^2} & +6.\mathbf{10^1} & +0.\mathbf{10^0} &) & 2.\mathbf{10^1} & +6.\mathbf{10^0} \\ \cline{1-5}
 & & 8.\mathbf{10^2} & +6.\mathbf{10^1} & +7.\mathbf{10^0} & & & \\
-(& & 8.\mathbf{10^2} & +5.\mathbf{10^1} & +8.\mathbf{10^0} &) & & \\ \cline{1-5}
 & & & & 9.\mathbf{10^0} & & &
\end{array}$$

Le semblant de division du polynôme $3x^3 + 7x^2 + 2x + 7$ par $x^2 + 4x + 3$ auquel on pense naturellement n'est en fait pas une division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{array}{rccccl|cc}
 & 3.\boldsymbol{x^3} & +7.\boldsymbol{x^2} & +2.\boldsymbol{x^1} & +7.\boldsymbol{x^0} & & 1.\boldsymbol{x^2} \quad +4.\boldsymbol{x^1} & +3.\boldsymbol{x^0} \\ \cline{7-8}
-(& 2.\boldsymbol{x^3} & +8.\boldsymbol{x^2} & +6.\boldsymbol{x^1} & +0.\boldsymbol{x^0} &) & 2.\boldsymbol{x^1} & +6.\boldsymbol{x^0} \\ \cline{1-5}
 & & 8.\boldsymbol{x^2} & +6.\boldsymbol{x^1} & +7.\boldsymbol{x^0} & & & \\
-(& & 8.\boldsymbol{x^2} & +5.\boldsymbol{x^1} & +8.\boldsymbol{x^0} &) & & \\ \cline{1-5}
 & & & & 9.\boldsymbol{x^0} & & &
\end{array}$$

Il ne s'agit en fait pas d'une division euclidienne et cette « pseudo-division » n'a que peu d'intérêt autre que pédagogique. Cette « pseudo-division » est effectuée dans un espace qui dépasse largement le cadre de ce cours (l'espace quotient hors programme « $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-10)}$ ») et en n'écrivant les coefficients qu'avec « 0 », « 1 », « 2 »,...,« 9 ». « Dans le monde $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-10)}$ », comme l'égalité $x - 10 = 0$ est vraie, la notion de degré d'un polynôme n'a plus de sens (et donc il n'y a même pas de division euclidienne) et on peut écrire n'importe quel polynôme avec des coefficients de 0 à 9. Par exemple $10x = x \times x = x^2$, $11x = (10+1)\,x = x^2 + x$, $12x = (10+2)\,x = x^2 + 2x$, $32x = (3 \times 10 + 2)\,x = 3x^2 + 2x$, $32x^2 = 3x^3 + 2x^2$. Dans ce monde, on a bien :

$$\begin{aligned}
\underbrace{(2x+6)}_{26} \underbrace{\times}_{\times} \underbrace{\left(1x^2+4x+3\right)}_{143} \underbrace{+}_{+} \underbrace{9}_{9} &= 2\underbrace{x^3}_{1\,000} + 8\underbrace{x^2}_{100} + 6\underbrace{x}_{10} + 6\underbrace{x^2}_{100} + 24\underbrace{x}_{10} + 18 + 9 \\
&= 2x^3 + 14x^2 + 30x + 27 \\
&= 2x^3 + \left(1 \,.\, 10^1 + 4 \,.\, 10^0\right) x^2 + \left(3 \,.\, 10^1 + 0 \,.\, 10^0\right) x + \left(2 \,.\, 10^1 + 7 \,.\, 10^0\right) \\
&= 2x^3 + \left(1 \,.\, x^1 + 4 \,.\, x^0\right) x^2 + \left(3 \,.\, x^1 + 0 \,.\, x^0\right) x + \left(2 \,.\, x^1 + 7 \,.\, x^0\right) \\
&= 2x^3 + x^3 + 4x^2 + 3x^2 + 2x + 7 \\
&= \underbrace{3x^3 + 7x^2 + 2x + 7}_{3\,727}
\end{aligned}$$

« dans un espace où $x = 10$ »

Exemple (Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$)
Contrairement au simulacre de division barré précédent (dans un espace hors-programme), la division euclidienne de $3x^3 + 7x^2 + 2x + 7$ par $x^2 + 4x + 3$ dans $\mathbb{R}[X]$, elle, d'une part n'assimile pas « l'objet x » au nombre 10 et, d'autre part, « autorise » des coefficients autres que 0, 1, 2,..., 9 :

$$\begin{array}{rccccl|ccc}
 & 3x^3 & +7x^2 & +2x & +7 & & x^2 & +4x & +3 \\ \cline{7-9}
-(& 3x^3 & +12x^2 & +9x & &) & & 3x & -5 \\ \cline{1-6}
 & & -5x^2 & -7x & +7 & & & & \\
-(& & -5x^2 & -20x & -15 &) & & & \\ \cline{1-6}
 & & & 13x & +22 & & & &
\end{array}$$

La division euclidienne de $3x^3 + 7x^2 + 2x + 7$ par $x^2 + 4x + 3$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{3x^3 + 7x^2 + 2x + 7 = (3x - 5)\left(x^2 + 4x + 3\right) + (13x + 22)}$$

Théorème-définition (Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$)
Soient $P, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D \neq 0$.
Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que :

$$\begin{cases} P = Q \,.\, D + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}$$

- L'égalité « $P = Q \,.\, D + R$ » telle que $\deg(R) < \deg(D)$ est appelée la division euclidienne de P par D.
- Dans cette égalité :
  - P est appelé le dividende.
  - D est appelé le diviseur.
  - Q est appelé le quotient.
  - R est appelé le reste.

3) *a*) Démontrer que le polynôme $x^3 - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 + x + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ en posant la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rlr|l} & x^3 & -1 & x^2 \quad +x \quad +1 \\ \cline{4-4} -(& \dots &) & \dots \\ \cline{1-3} & \dots & & \\ & & & \end{array}$$

b) Effectuer la division euclidienne de $x^3 - 3x^2$ par $x^2 - x + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Effectuer la division euclidienne de $x^4 + 6x^2 - 2x + 5$ par $x^3 - x^2 + 4x - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$.
d) Effectuer la division euclidienne de $-16x^4 - 64x^2 - x - 100$ par $4x^2 + 4x + 10$ dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Effectuer la division euclidienne de $x^3 - 1$ par $x + i$ dans $\mathbb{C}[X]$ en la posant :

$$\begin{array}{rlr|l} & x^3 & -1 & x \quad +i \\ \cline{4-4} -(& \dots &) & \dots \\ \cline{1-3} & \dots & & \\ & & & \end{array}$$

2.4 Lien entre la notion de racine d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Dans cette section, $f \in \mathbb{K}[X]$ désigne un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{K}$.

Définition (Racine d'un polynôme).
On dit que r est une racine du polynôme f lorsque $f(r) = 0$.
Autrement dit :

$$\boxed{\big(r \text{ est une racine du polynôme } f\big) \iff f(r) = 0}$$

1) Démontrer que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est une racine de $x^5 - 1$.

Théorème (Racine d'un polynôme et divisibilité) (ou caractérisation algébrique d'une racine d'un polynôme)

$$\boxed{\big(r \text{ est une racine du polynôme } f\big) \iff f \text{ est divisible par } x - r \text{ dans } \mathbb{K}[X]}$$

2) En utilisant ce théorème, que peut-on déduire de la question précédente concernant la fonction $x \mapsto \frac{x^5-1}{x-e^{i\frac{2\pi}{5}}}$?

3) En posant une division euclidienne, vérifier que $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ est bien une racine de $x^5 - 1$ et écrire $\frac{x^5-1}{x-e^{i\frac{2\pi}{5}}}$ sous la forme d'un polynôme.

4) Écrire $\frac{7x^3+17x^2-10x+6}{x+3}$ sous la forme d'un polynôme.

5) Démontrer que $\frac{7x^3+17x^2-10x+6}{x+2}$ n'est pas un polynôme.

2.5 Irréductibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Comme souvent en mathématique (et même dans la plupart des domaines), on cherche à **comprendre un objet en le voyant comme composé d'objets plus simples**.

Par exemple, dans l'ensemble des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$), les « objets simples » sont ceux qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-même comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,.... On les appelle les nombres premiers. Et, d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, chaque nombre entier n, s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) comme un produit

$$n = p_1^{m_1} \times p_2^{m_2} \times p_3^{m_3} \times \dots \times p_r^{m_r} \qquad \text{où } p_1, p_2, p_3, \dots p_r \text{ sont des nombres premiers.}$$

Par exemple :

$$4\,695\,596\,677\,863 = 3^3 \, . \, 7^1 \, . \, 13^2 \, . \, 43^5$$

La donnée de ses diviseurs premiers 3, 7, 13, 43 et le nombre de fois où ils apparaissent dans cette décomposition en facteurs premiers « 3 facteurs 3, 1 facteurs 7, 2 facteurs 13, 5 facteurs 43 » identifient complètement le nombre 4 695 596 677 863 qui resterait bien insaisissable sans cette « **décompositions en objet plus simples** ».

Autrement dit :

La séquence « 3 facteurs 3, 1 facteurs 7, 2 facteurs 13, 5 facteurs 43 » est l'ADN de 4 695 596 677 863.

Dans l'arithmétique des polynômes, **les objets simples** (« **les gènes qui déterminent les polynômes** ») sont appelés **les polynômes irréductibles** car ils sont définis comme suit :

Définition (**Polynôme non irréductible** de $\mathbb{K}[X]$ et **polynôme irréductible** de $\mathbb{K}[X]$)
Soit $f \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que f **est non irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ si il est constant ou si on peut écrire :

$$f(x) = P(x) \times Q(x) \qquad \text{avec } P, Q \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \geq 1 \text{ et } \deg(Q) \geq 1$$

- On dit que f **est irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il n'est pas non irréductible.

Exemple (Polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$)

- Les polynômes 3 et $7i$ et 0 ne sont pas irréductibles car ce sont des polynômes constants.
- $\sqrt{2}x - i + \frac{\sqrt{3}}{7}$ est irréductible car il est de degré 1.
- $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x - 4$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car il admet 1 pour racine et que $\deg\left(f\right) = 7 > 1$.
  En effet, comme $f(1) = 0$, 1 est une racine de f, et donc $x - 1$ divise f dans $\mathbb{R}[X]$.
  Autrement dit, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f(x) = (x-1) \times Q(x)$$

  et on a $\deg(x-1) = 1 \geq 1$ et $\deg(Q) = \deg\left(f\right) - \deg(x-1) = 7 - 1 = 6 \geq 1$.
- $x^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car :

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

- ⚠Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement non irréductible.
  Par exemple :

$$x^4 + 2x^2 + 1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right) \qquad \text{et } \deg\left(x^2+1\right) = 2 \geq 1 \qquad \text{et } x^4 + 2x^2 + 1 \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{R}$$

1) Démontrer qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 est non irréductible.

Théorème (**Théorème fondamental de l'algèbre**)
Un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

2) D'après le théorème fondamental de l'algèbre, quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?
3) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré 2 ?
4) En appliquant le théorème des valeurs intérmédiaires, démontrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine dans $\mathbb{R}$.
5) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg\left(f\right) \geq 3$ et tel que f n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.
   Comme expliqué au début de ce cours, on peut considérer que $f \in \mathbb{C}[X]$ (et que chacun de ses coefficients a une partie imaginaire nulle).
   Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'algèbre, f admet une racine $r \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que :

$$f\left(\overline{r}\right) = \overline{f(r)}$$

b) En déduire une autre racine de f dans $\mathbb{C}$.

c) Démontrer que :

$$(x-r)\left(x-\overline{r}\right) \in \mathbb{R}[X]$$

d) En déduire que f n'est pas non irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

6) En déduire tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

2.6 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème-définition (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et multiplicité d'une racine)
Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg\left(f\right) \geq 1$.
On a :

$$f(x) = a \times (x-r_1)^{m_1} \times (x-r_2)^{m_2} \times \ldots \times (x-r_k)^{m_k}$$

où on a noté $r_1,\ldots,r_k$ les racines complexes (deux à deux distinctes et de partie imaginaire éventuellement nulle) de f et où a est le coefficient dominant et $\boldsymbol{r_l}$ **est le nombre de fois qu'apparaît le facteur** $\boldsymbol{x-r_l}$ dans cette **décomposition en facteurs irréductibles de** $\boldsymbol{f}$

Dans la décomposition précédente, l'entier m_l est appelé **la multiplicité de** $\boldsymbol{r_l}$ **en tant que racine du polynôme** $\boldsymbol{f}$.
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

1) On note $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.
   a) Démontrer que $1+i$ est une racine du polynôme f.
   b) Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2) On note $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1$.
   a) Démontrer que $\frac{1}{2}$ est une racine du polynôme f.
   b) Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
3) On note $f(x) = 3x^5 - (1+9i)x^4 + (-7+3i)x^3 + (3-3i)x^2 - (6+i)x + 2i$
   a) En posant successivement plusieurs divisions euclidiennes, déterminer la multiplicité de i en tant que racine du polynôme f.
   b) Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Rappeler l'expression des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
   b) En déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $x^n - 1$.
5) On note $f(x) = (x+i)^5 - (x-i)^5$.
   a) Déterminer les racines du polynôme f.
   b) Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2.7 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème-définition (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$)
Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg\left(f\right) \geq 1$.
On a :

$$f(x) = a \times \underbrace{(x-r_1)^{m_1} \times (x-r_2)^{m_2} \times \ldots \times (x-r_k)^{m_k}}_{\text{éventuellement aucun facteur si } f \text{ n'a pas de racine réelle}} \times \underbrace{\left(\underbrace{x^2+b_1x+c_1}_{«\Delta<0»}\right)^{n_1} \times \left(\underbrace{x^2+b_2x+c_2}_{«\Delta<0»}\right)^{n_2} \times \ldots \times \left(\underbrace{x^2+b_lx+c_l}_{«\Delta<0»}\right)^{n_l}}_{\text{éventuellement aucun facteur si toutes les racines complexes de } f \text{ sont réelles}}$$

Où :

- a est le coefficient dominant de f.
- $r_1,\ldots,r_k$ sont les racines réelles de f (deux à deux distinctes).
- Les $x^2+b_hx+c_h$ sont les diviseurs irréductibles de f dans $\mathbb{R}[X]$ (à coefficients réels et de discriminant strictement négatif donc)
- n_h est le plus grand entier tel que $\left(x^2+b_hx+c_h\right)^{n_h}$ divise f.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

1) On note $f(x) = (x+i)^5 - (x-i)^5$.
   En utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de f dans $\mathbb{C}[X]$ déjà déterminée dans la section précédente et en y regroupant les facteurs deux par deux pour faire apparaître des facteurs de la forme $(x-r)\left(x-\overline{r}\right) = x^2 - \underbrace{2\mathscr{R}e(r)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{|r|^2}_{\in\mathbb{R}}$ (donc appartenant à $\mathbb{R}[X]$), déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de f dans $\mathbb{R}[X]$.
2) On note $f(x) = x^6 + 64$
   Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

3.1 Définitions de $\mathbb{K}(X)$ et de ses éléments simples

Définitions (Fractions rationnelles, fonctions rationnelles et ensemble $\mathbb{K}(X)$)

- On appelle **fonction rationnelle à coefficients dans K** une fonction f de la forme suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\setminus\{r_1, r_2, ..., r_d\} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{P(x)}{Q(x)} \end{array} \qquad \text{avec } P, Q \in \mathbb{K}(X) \text{ et } \boldsymbol{r_1, r_2, ..., r_d} \textbf{ les racines de } \boldsymbol{Q} \textbf{ dans } \mathbb{K}$$

- Une **fraction rationnelle à coefficients dans K** est un objet bien plus abstrait qui dépasse le cadre de ce cours. Il s'agit en fait d'un ensemble de couples de polynômes. Cependant, comme à chaque fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ il correspond une unique fonction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ et inversement, on fera parfois l'abus de langage de dire « fraction rationnelle » à la place de « fonction rationnelle ».

- On note **$\mathbb{K}(X)$** l'ensemble de toutes les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ (et aussi, par abus de langage, l'ensemble de toutes les fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$).

Exemples et abus de langage complémentaire (Fractions rationnelles, fonctions rationnelles et ensemble $\mathbb{K}(X)$)

- Tout polynôme est une fraction rationnelle.
- Les fonctions suivantes sont des éléments de $\mathbb{R}(X)$, c'est-à-dire des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-3;1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^8-6x^5+\sqrt{2}x^2-19}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^3(x+3)^7} \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^7-\sqrt{2}x^3-1}{x^2+x+1} \end{array} \qquad f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^7-6x^5+\sqrt{2}x^2-19}{x^2+2x+1} \end{array}$$

- Les fonctions suivantes sont des éléments de $\mathbb{C}(X)$, c'est-à-dire des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$g_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{-3;1;-i;i\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{x^8-6x^5+\sqrt{2}x^2-19}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^3(x+3)^7} \end{array} \qquad g_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\left\{\overline{j};j\right\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{x^7-\sqrt{2}x^3-1}{x^2+x+1} \end{array}$$

où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$g_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}; \frac{1}{2}+\frac{3i}{2}\right\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{(x-i)\left(ix^4-\left(3+\frac{\sqrt{5}}{7i}\right)x\right)}{x^2-ix+\frac{1}{2}-i} \end{array}$$

- **On se permet aussi les abus de langage comme $f_1 = g_1$.** On peut considérer par exemple qu'une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ mais que les parties imaginaires de ses coefficients sont nulles en écrivant par exemple « $\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{C}(X)$ ».

1) Quels sont les éléments de $\mathbb{R}(X)$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$?
2) Quels sont les éléments de $\mathbb{C}(X)$ dont le domaine de définition est $\mathbb{C}$?

Définitions (Éléments simples de $\mathbb{K}(X)$)
On appelle **élément simple de $\mathbb{K}(X)$** une fraction rationnelle de la forme suivante :

$$\boxed{\frac{f(x)}{(g(x))^m} \qquad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} f \in \mathbb{K}[X] \\ \textbf{g polynôme irréductible à coefficients dans } \mathbb{K} \\ \deg(f) < \deg(g) \\ m \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.}$$

3) La fraction rationnelle $\frac{x}{x-1}$ est-elle un élements simples de $\mathbb{C}(X)$?
4) La fraction rationnelle $\frac{x}{x^2+1}$ est-elle un élements simples de $\mathbb{C}(X)$?
5) La fraction rationnelle $\frac{x}{x^2+1}$ est-elle un élements simples de $\mathbb{R}(X)$?
6) Quels sont les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$?
7) Quels sont les éléments simples de $\mathbb{C}(X)$?

3.2 Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$

Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq \deg(P) < \deg(Q) \\ Q(x) = a \times (Q_1(x))^{m_1} \times \ldots \times (Q_k(x))^{m_k} \text{ est la décomposition en facteurs irréductibles de } Q \text{ dans } \mathbb{K}[X] \end{array}\right.$$

Alors la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose sous la forme d'une somme d'éléments simples de $\mathbb{K}(X)$ unique à l'ordre près des termes et cette décomposition est plus précisément de la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\dfrac{N_{1,1}}{Q_1(x)} + \dfrac{N_{1,2}}{(Q_1(x))^2} + \dfrac{N_{1,3}}{(Q_1(x))^3} + \ldots + \dfrac{N_{1,m_1}}{(Q_1(x))^{m_1}}}_{\text{éventuellement un seul terme}} \\ \qquad + \underbrace{\dfrac{N_{2,1}}{Q_2(x)} + \dfrac{N_{2,2}}{(Q_2(x))^2} + \dfrac{N_{2,3}}{(Q_2(x))^3} + \ldots + \dfrac{N_{2,m_2}}{(Q_2(x))^{m_2}}}_{\text{éventuellement un seul terme}} \\ \qquad + \ldots \\ \qquad + \underbrace{\dfrac{N_{k,1}}{Q_k(x)} + \dfrac{N_{k,2}}{(Q_k(x))^2} + \dfrac{N_{k,3}}{(Q_k(x))^3} + \ldots + \dfrac{N_{1,m_k}}{(Q_k(x))^{m_k}}}_{\text{éventuellement un seul terme}} \end{array}\right\} \text{éventuellement une seule ligne}$$

1) On note $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$.
   a) Peut-on appliquer directement le théorème de décomposition en éléments simples à la fraction rationnelle f ? Pourquoi ?
   b) Via une division euclidienne, écrire $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = E(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} E,\ P,\ Q \in \mathbb{R}[X] \\ 0 \leq \deg(P) < \deg(Q) \end{array}\right.$$

   c) Dans cette question, on va décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ sans méthode, en utilisant des astuces de calcul.
      i) Vérifier que : $1 = \frac{1}{2}((x+1)-(x-1))$
      ii) En déduire la décomposition de $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ en utilisant les deux formules de calcul en expression fractionnaire suivantes :

$$\frac{a+b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} \qquad\qquad \frac{a \times d}{c \times d} = \frac{a}{c}$$

   d) Quelle est la décomposition en éléments de simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dans $\mathbb{C}(X)$?

Abus de langage (« Décomposition en éléments simples avec un terme polynomial »)

⚠ On se permet aussi parfois un abus de langage en disant que $x^2+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$ est la décomposition en éléments simples de $\frac{x^4}{x^2-1}$ dans $\mathbb{R}(X)$ alors que pourtant $\deg(x^4) \geq \deg(x^2-1)$.

e) Avec cet abus de langage, quelle est la décomposition de $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ (où même dans $\mathbb{C}(X)$) ?

3.3 Quelques méthodes de calcul

3.3.1 Mise au même dénominateur et identification des coefficients du polynôme au numérateur

1) On note $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2x^2-x+2}$.

a) Poser la division euclidienne adéquate puis factoriser le dénominateur en un produit de polynômes irréductibles puis appliquer le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
On devrait obtenir :

$$\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} \qquad \text{avec } a,\ b,\ c \text{ trois réels qu'il reste à déterminer}$$

b) En utilisant la formule de calcul en expression fractionnaire $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$, déterminer des expressions de α, β et γ en fonction de a, b et c où :

$$\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

c) En déduire un système d'équations linéaires dont (a,b,c) est l'unique solution :

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{?}\,.\,a+\textbf{?}\,.\,b+\textbf{?}\,.\,c=\alpha \\ \textbf{?}\,.\,a+\textbf{?}\,.\,b+\textbf{?}\,.\,c=\beta \\ \textbf{?}\,.\,a+\textbf{?}\,.\,b+\textbf{?}\,.\,c=\gamma \end{array}\right.$$

d) En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)}$.

e) En déduire ce qu'on appelle encore la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2x^2-x+2}$ en utilisant l'abus de language précédent.

3.3.2 Méthode du cache

Dans cette section, on reprend le même exemple qu'à la section précédente afin d'illustrer l'efficacité de la dite méthode du cache (tout en l'expliquant).

1) On note $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2x^2-x+2}$.
On reprend la formule suivante que l'on a déjà démontrée dans la section précédente via une division euclidienne, une factorisation en produit de polynômes irréductibles et du calcul en expression fractionnaire :

$$f(x) = x+2+\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = x+2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2} \qquad \text{avec } a,\ b,\ c \text{ trois réels qu'il reste à déterminer}$$

Mais on ne reprend pas $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{16}{3}$ car on cherche justement à retrouver ces valeurs par la méthode du cache tout en la présentant pour montrer que cette méthode est bien plus efficace (quand on peut l'appliquer) que la méthode de mise au même dénominateur et d'identification des coefficients du polynôme au numérateur présentée dans la section précédente.
Pour déterminer a, on procède comme suit :

$$\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$

$$(x+1)\times\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = (x+1)\times\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}\right)$$

$$(x+1)\times\frac{5x^2-4}{(x+1)(x-1)(x-2)} = (x+1)\times\frac{a}{x+1}+(x+1)\times\frac{b}{x-1}+(x+1)\times\frac{c}{x-2}$$

$$\frac{5x^2-4}{\text{[redacted]}\,(x-1)(x-2)} = a+\underbrace{(x+1)\times\frac{b}{x-1}}_{=0 \text{ quand } x=-1}+\underbrace{(x+1)\times\frac{c}{x-2}}_{=0 \text{ quand } x=-1}$$

On cache « $x+1$ »

$$\left.\frac{5x^2-4}{\text{[redacted]}\,(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1} = a+\underbrace{(\mathbf{-1}+1)\times\frac{b}{x-1}}_{=0}+\underbrace{(\mathbf{-1}+1)\times\frac{c}{x-2}}_{=0}$$

On cache « $x+1$ »

$$\left.\frac{5x^2-4}{\text{[redacted]}\,(x-1)\,(x-2)}\right|_{x=-1} = a+\mathbf{0}+\mathbf{0}$$

On cache « $x+1$ »

Voilà pourquoi on appelle cela **la méthode du cache** :

$$\boxed{a = \left.\frac{5x^2-4}{\text{[redacted]}\,(x-1)\,(x-2)}\right|_{x=-1}}$$

On cache « $x+1$ »

On obtient donc :

$$\begin{aligned} a &= \frac{5\times(-1)^2-4}{(-1-1)\,(-1-2)} \\ &= \frac{1}{(-2)\,(-3)} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Remarque
Les détails précédents ont été écrits que pour démontrer la méthode du cache.
Lorsque l'on rédige une application de la méthode du cache, on peut n'écrire que les dernières égalités ci-dessus.

⚠ La méthode du cache n'est applicable que lorsque l'élément simple concerné a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible.
Quand la méthode du cache est applicable pour un élément simple dont le numérateur est constant (comme dans cet exemple), elle détermine directement la valeur de cette constante mais, lorsque le numérateur est un polynôme de degré 1, elle ne fournit qu'une relation entre les coefficients de ce polynôme.

a) Pourquoi la méthode du cache est applicable pour déterminer tous les coefficients de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle dont le dénominateur a toutes ses racines complexes de multiplicité égale à 1 ?

b) Pourquoi la méthode du cache est applicable pour déterminer les valeurs de b et de c ?

c) Retrouver les valeurs de b et de c en appliquant la méthode du cache.

3.3.3 Évaluer x en une valeur particulière

1) On note $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.

a) Appliquer le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ à la fraction rationnelle f.

b) Déterminer tous les coefficients que l'on peut déterminer en utilisant la méthode du cache.

c) Il devrait rester un coefficient que l'on ne peut pas déterminer avec la méthode du cache.
Évaluer la formule obtenue en 0 (c'est-à-dire « remplacer x par 0 » ou « $x=0$ ») pour en déduire une égalité vérifiée par ce dernier coefficient.

d) Achever la décomposition en éléments simples de $f(x)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

3.3.4 Décomposer d'abord dans $\mathbb{C}(X)$ pour en déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Méthode
Pour déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$, on peut la déduire de sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

1) On note $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x-2)}$.

a) Appliquer le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et utiliser la méthode du cache pour déterminer tous ses coefficients.

b) En déduire la décomposition en éléments simples de $f(x)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

c) Retrouver la décomposition en éléments simples de $f(x)$ dans $\mathbb{R}(X)$ sans passer par $\mathbb{C}(X)$ en appliquant seulement la méthode du cache en évaluant en particulier en $x=i$ pour déterminer les coefficients du numérateur de degré 1.

3.3.5 « Multiplier par x et faire tendre x vers $+\infty$ »

1) On note $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)}$.
   a) Appliquer le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ à la fraction rationnelle f.
   b) Déterminer tous les coefficients que l'on peut déterminer en appliquant la méthode du cache.
   Indication : Il y en a trois et deux d'entre eux se déterminent comme dans la dernière question de la section précédente.
   c) En multipliant par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$ dans la relation suivante, obtenir une relation entre a et e :

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{e}{x-2}$$

   d) En déduire a.
   e) Employer la méthode de la section « Évaluer x en une valeur particulière » pour déterminer le coefficients qui n'a pas encore été déterminé.
   f) Achever la décomposition en éléments simples de $f(x)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

3.3.6 Remarquer une symétrie

Parfois, en remarquant une invariance comme

$$f(-x) = f(x), \qquad f(-x) = -f(x), \qquad f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \qquad f(jx) = f(x) = f(j^2x) \text{ avec } j = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

on peut obtenir une relation entre les coeffcicients de la décomposition en éléments simples recherchée.
On exploite de telles invariances dans les questions 1)h) et 1)i) de l'exercice de la section suivante.
Par exemple :

- Toutes les fractions rationnelles de cet exercice vérifient la troisième relation car elles sont à coefficients réels (Elles appartiennent à $\mathbb{R}(X)$.).
- La fraction rationnelle $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ vérifie la première relation (Elle est paire.)
- La fraction rationnelle $\frac{3}{(x^3-1)^2}$ vérifie les deux dernières relations.

3.3.7 Trouver la bonne méthode

1) Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

   a) $\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$
   b) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
   c) $\frac{1}{x(x-1)^2}$
   d) $\frac{2x}{x^2+1}$
   e) $\frac{1}{x^2+x+1}$
   f) $\frac{4}{(x^2+1)^2}$
   g) $\frac{3x-1}{x^2(x+1)^2}$
   h) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$
   i) $\frac{3}{(x^3-1)^2}$

2) Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

   a) $\frac{4x^2}{x^4-1}$
   b) $\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$
   c) $\frac{1}{x^4-x^2-2}$
   d) $\frac{3x^6+17x^5+19x^4-20x^3-8x^2+24x+13}{(x-1)(x+3)^2}$
   e) $\frac{x^6+x^5+x^4+3x^2-x-1}{x^4-1}$
   f) $\frac{2x^7+3x^6-2x^5-2x^4-4x^3-7x^2-1}{x^4-x^2-2}$
   g) $\frac{x^4-x+2}{(x-1)(x^2-1)}$
   h) $\frac{x^4+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$
   i) $\frac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2}$

3.4 Application au calcul intégral

1) Déterminer les primitives de f dans chacun cas suivants :

   a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{4x^2}{x^4-1} \end{array}$
   b) $f: \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} \end{array}$
   c) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^4-x^2-2} \end{array}$

2) Les éléments simples qui sont inverse d'un polynôme de degré 2 autre que x^2+1 sont plus difficile à intégrer car il nécessite un changement de variable.
   Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants :

   a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2+4} \end{array}$
   b) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2+4x+5} \end{array}$
   c) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3x^2+x+1} \end{array}$

3) Les éléments simples qui sont puissance de l'inverses d'un polynôme de degré 2 sont encore plus difficiles à intégrer. Déterminer les primitives de la fonctions suivante en effectuant successivement deux changements de variable :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \end{array}$$