CORRECTION DES EXERCICES SUR LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

1 Détermination de la multiplicité d'une racine par divisions euclidiennes successives et décomposition en irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ (*section 2.6 question 3) du cours*)

1.1 Énoncé

3) On note $f(x) = 3x^5 - (1+9i)x^4 + (-7+3i)x^3 + (3-3i)x^2 - (6+i)x + 2i$

   a) En posant successivement plusieurs divisions euclidiennes, déterminer la multiplicité de i en tant que racine du polynôme f.

   b) Décomposer f en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

1.2 Correction

3) *a*) On pose la division euclidienne de $f(x)$ par $x-i$ pour déterminer si i est racine de multiplicité au moins 1 (si le reste est nul) tout en calculant $\frac{f(x)}{x-i}$ (qui est un polynôme si i est racine de f) :

$$
\begin{array}{rcccccccc|ccccc}
 & 3x^5 & +(-1-9i)x^4 & +(-7+3i)x^3 & +(3-3i)x^2 & +(-6-i)x & +2i & & x & -i & & & \\ \cline{9-13}
-(& 3x^5 & -3ix^4 & & & & &) & 3x^4 & +(-1-6i)x^3 & +(-1+2i)x^2 & +(1-4i)x & -2 \\ \cline{1-8}
 & & (-1-6i)x^4 & +(-7+3i)x^3 & +(3-3i)x^2 & +(-6-i)x & +2i & & & & & & \\
-(& & (-1-6i)x^4 & +(-6+i)x^3 & & & &) & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & & (-1+2i)x^3 & +(3-3i)x^2 & +(-6-i)x & +2i & & & & & & \\
-(& & & (-1+2i)x^3 & +(2+i)x^2 & & &) & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & & & (1-4i)x^2 & +(-6-i)x & +2i & & & & & & \\
-(& & & & (1-4i)x^2 & +(-4-i)x & &) & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & & & & -2x & +2i & & & & & & \\
-(& & & & & -2x & +i &) & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & & & & & \mathbf{0} & & & & & &
\end{array}
$$

Donc :

$$3x^5 - (1+9i)x^4 + (-7+3i)x^3 + (3-3i)x^2 - (6+i)x + 2i = \left(3x^4 + (-1-6i)x^3 + (-1+2i)x^2 + (1-4i)x - 2\right)(x-i) + \mathbf{0}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x-i} &= \frac{3x^5 - (1+9i)x^4 + (-7+3i)x^3 + (3-3i)x^2 - (6+i)x + 2i}{x-i} \\
&= 3x^4 + (-1-6i)x^3 + (-1+2i)x^2 + (1-4i)x - 2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x-i} = 3x^4 + (-1-6i)x^3 + (-1+2i)x^2 + (1-4i)x - 2}$$

On pose la division euclidienne de $\frac{f(x)}{x-i}$ par $x-i$ pour déterminer si i est racine de multiplicité au moins 2 de f (si le reste est nul) tout en calculant $\frac{f(x)}{(x-i)^2}$ (qui est un polynôme si i est racine de f de multiplicité au moins 2) :

$$
\begin{array}{rcccccc|cccc}
 & 3x^4 & +(-1-6i)x^3 & +(-1+2i)x^2 & +(1-4i)x & -2 & & x & -i & & \\ \cline{8-11}
-(& 3x^4 & -3ix^3 & & & & & 3x^3 & +(-1-3i)x^2 & +(2+i)x & -2i \\ \cline{1-7}
 & & (-1-3i)x^3 & +(-1+2i)x^2 & +(1-4i)x & -2 & & & & & \\
-(& & (-1-3i)x^3 & +(-3+i)x^2 & & &) & & & & \\ \cline{1-7}
 & & & (2+i)x^2 & +(1-4i)x & -2 & & & & & \\
-(& & & (2+i)x^2 & +(1-2i)x & &) & & & & \\ \cline{1-7}
 & & & & -2ix & -2 & & & & & \\
-(& & & & -2ix & -2 &) & & & & \\ \cline{1-7}
 & & & & & \mathbf{0} & & & & &
\end{array}
$$

Donc :

$$3x^4 + (-1-6i)x^3 + (-1+2i)x^2 + (1-4i)x - 2 = \left(3x^3 + (-1-3i)x^2 + (2+i)x - 2i\right)(x-i) + \mathbf{0}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(x-i)^2} &= \frac{3x^4 + (-1-6i)x^3 + (-1+2i)x^2 + (1-4i)x - 2}{x-i} \\
&= 3x^3 + (-1-3i)x^2 + (2+i)x - 2i
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-i)^2} = 3x^3 + (-1-3i)x^2 + (2+i)x - 2i}$$

On pose la division euclidienne de $\frac{f(x)}{(x-i)^2}$ par $x-i$ pour déterminer si i est racine de multiplicité au moins 3 de f (si le reste est nul) tout en calculant $\frac{f(x)}{(x-i)^3}$ (qui est un polynôme si i est racine de f de multiplicité au moins 3) :

$$
\begin{array}{rrrrrr|lll}
 & 3x^3 & +(-1-3i)\,x^2 & +(2+i)\,x & -2i & & x & -i & \\
\cline{7-9}
-(& 3x^3 & -3ix^2 & & &) & 3x^2 & -x & +2 \\
\cline{1-6}
 & & -x^2 & +(2+i)\,x & -2i & & & & \\
-(& & -x^2 & +ix & &) & & & \\
\cline{1-6}
 & & & 2x & -2i & & & & \\
-(& & & 2x & -2i &) & & & \\
\cline{1-6}
 & & & & & \mathbf{0} & & &
\end{array}
$$

Donc :

$$3x^3+(-1-3i)\,x^2+(2+i)\,x-2i=\left(3x^2-x+2\right)(x-i)+\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(x-i)^3}&=\frac{3x^3+(-1-3i)\,x^2+(2+i)\,x-2i}{x-i}\\&=3x^2-x+2\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-i)^3}=3x^2-x+2}$$

On pose la division euclidienne de $\frac{f(x)}{(x-i)^3}$ par $x-i$ pour déterminer si i est racine de multiplicité au moins 4 de f (si le reste est nul) tout en calculant $\frac{f(x)}{(x-i)^4}$ (qui est un polynôme si i est racine de f de multiplicité au moins 4) :

$$
\begin{array}{rrrrr|ll}
 & 3x^2 & -x & +2 & & x & -i \\
\cline{6-7}
-(& 3x^2 & -3ix & &) & 3x & +(-1+3i) \\
\cline{1-5}
 & & (-1+3i)\,x & +2 & & & \\
-(& & (-1+3i)\,x & +(3+i) &) & & \\
\cline{1-5}
 & & & -1-i & & &
\end{array}
$$

Donc :

$$3x^2-x+2=(3x+(-1+3i))\,(x-i)+\underbrace{\boldsymbol{(-1-i)}}_{\neq\mathbf{0}}$$

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-i)^4}=3x+(-1+3i)+\frac{\boldsymbol{-1-i}}{\boldsymbol{x-i}}\notin\mathbb{C}[X]}$$

En définitive :

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-i)^3}\in\mathbb{C}[X]\qquad\qquad\frac{f(x)}{(x-i)^4}\notin\mathbb{C}[X]}$$

Donc la multiplicité de i en tant que racine de f est 3.

b) D'après la question précédente, on a :

$$f(x)=(x-i)^3\times\left(3x^2-x+2\right)$$

Il ne reste qu'à écrire le facteur $3x^2-x+2$ sous la forme d'un produit de deux polynômes de degré 1.

$$\Delta=(-1)^2-4\times3\times2=-23\qquad\frac{-(-1)-i\sqrt{-\Delta}}{2\times3}=\frac{1}{6}\left(1-i\sqrt{23}\right)\qquad\frac{-(-1)+i\sqrt{-\Delta}}{2\times3}=\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{23}\right)$$

Ainsi :

$$3x^2-x+2=3\left(x-\frac{1}{6}\left(1-i\sqrt{23}\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{23}\right)\right)$$

$$\boxed{f(x)=3x^5-(1+9i)\,x^4+(-7+3i)\,x^3+(3-3i)\,x^2-(6+i)\,x+2i=3(x-i)^3\left(x-\frac{1}{6}\left(1-i\sqrt{23}\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}\left(1+i\sqrt{23}\right)\right)}$$

2 « Trouver la bonne méthode » pour décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ (*section 3.3.7 question 1) du cours*)

2.1 Énoncé

1) Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

a) $\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$

b) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

c) $\frac{1}{x(x-1)^2}$

d) $\frac{2x}{x^2+1}$

e) $\frac{1}{x^2+x+1}$

f) $\frac{4}{\left(x^2+1\right)^2}$

g) $\frac{3x-1}{x^2(x+1)^2}$

h) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$

i) $\frac{3}{\left(x^3-1\right)^2}$

2.2 Correction

1) a) $\boxed{\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}}$

- Comme $\deg\left(x^2+2x+5\right) = 2 \geq 2 = \deg\left(x^2-3x+2\right)$, on effectue d'abord la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & x^2 & +2x & +5 & & x^2 & -3x & +2 \\ \cline{6-8}
-(& x^2 & -3x & +2 &) & 1 & & \\
 & & 5x & +3 & & & &
\end{array}$$

Autrement dit :

$$x^2+2x+5 = 1 \times \left(x^2-3x+2\right) + (5x+3)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} &= \frac{1 \times \left(x^2-3x+2\right) + (5x+3)}{x^2-3x+2} \\
&= \frac{1 \times \left(x^2-3x+2\right)}{x^2-3x+2} + \frac{5x+3}{x^2-3x+2} \\
&= 1 + \frac{5x+3}{x^2-3x+2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{5x+3}{x^2-3x+2}}$$

<u>Commentaire :</u> Comme $\deg(5x+3) = 1 < 2 = \deg\left(x^2-3x+2\right)$, on peut décomposer en éléments simples cette dernière fraction rationnelle.

- On écrit x^2-3x+2 avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (et éventuellement un facteur constant) :
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$
Donc x^2-3x+2 a deux racines réelles disctinctes r_1 et r_2 qui sont :

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 1 \qquad r_2 = \frac{3+\sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
x^2-3x+2 &= 1 \times (x-1)(x-2) \\
&= (x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{5x+3}{x^2-3x+2} = \frac{5x+3}{(x-1)(x-2)}}$$

<u>Commentaire :</u> Comme $\deg(5x+3) = 1 < 2 = \deg\left(x^2-3x+2\right)$ et $(x-1)(x-2)$ est une écriture du dénominateur en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on est prêt pour appliquer le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux constantes complexes}}$$

<u>Commentaire :</u> Comme l'application du théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ aurait donné le même résultat (car le numérateur et le dénominateur appartiennent à $\mathbb{R}(X)$ et $(x-1)(x-2)$ est aussi la décomposition en facteurs irréductibles du dénominateur dans $\mathbb{R}(X)$), on sait que a et b sont même réels (leur partie imaginaire est nulle).

- On détermine les coefficients a et b :
Pour ce faire, comme chacun des éléments simples de cette décomposition a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible (car les racines du dénominateur de la fraction rationnelle sont toutes de multiplicité 1 (« par exemple, on a pas de facteur $x-1^2$ »)), on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer chacun de ces coefficients.
Pour déterminer a, on procède comme suit :

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

$$(x-1) \times \frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = (x-1) \times \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}\right)$$

$$(x-1) \times \frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = (x-1)\,\frac{a}{x-1} + (x-1)\,\frac{b}{x-2}$$

$$\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)} = a + (x-1)\,\frac{b}{x-2}$$

On cache « $x-1$ »

$$\left.\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)}\right|_{x=1} = a + \left.(x-1)\,\frac{b}{x-2}\right|_{x=1}$$

On cache « $x-1$ »

$$\left.\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)}\right|_{x=1} = a + (1-1)\,\frac{b}{1-2}$$

On cache « $x-1$ »

$$\left.\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)}\right|_{x=1} = a + 0$$

On cache « $x-1$ »

Voilà pourquoi on appelle cela la méthode du cache :

$$\boxed{a = \left.\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)}\right|_{x=1}}$$

On cache « $x-1$ »

En définitive :

$$a = \left.\frac{5x+3}{\text{[redacted]}\,(x-2)}\right|_{x=1}$$

On cache « $x-1$ »

$$= \frac{5\times 1+3}{(1-2)}$$

$$= -8$$

$$\boxed{a=-8}$$

$$b = \left.\frac{5x+3}{(x-1)\,\text{[redacted]}}\right|_{x=2}$$

On cache « $x-2$ »

$$= \frac{5\times 2+3}{(2-1)}$$

$$= 13$$

$$\boxed{b=13}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 - \frac{8}{x-1} + \frac{13}{x-2}}$$

b) $\boxed{\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}}$

- Comme $\deg\left(x^2+1\right) = 2 < 3 = \deg((x-1)(x-2)(x-3))$ et que le dénominateur est déjà écrit en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on peut appliquer directement le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sans effectuer de division euclidienne.
- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \qquad \text{avec } a,\ b \text{ et } c \text{ trois constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a, b et c :
Pour ce faire, comme chacun des éléments simples de cette décomposition a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer chacun de ces coefficients.

$$a = \left.\frac{x^2+1}{\text{[redacted]}\,(x-2)(x-3)}\right|_{x=1}$$

On cache « $x-1$ »

$$= \frac{1^2+1}{(1-2)(1-3)}$$

$$= 1$$

$$\boxed{a=1}$$

$$b = \left.\frac{x^2+1}{(x-1)\,\blacksquare\,(x-3)}\right|_{x=2}$$

On cache « $x-2$ »

$$= \frac{2^2+1}{(2-1)\,(2-3)}$$

$$= -5$$

$$\boxed{b=-5}$$

$$c = \left.\frac{x^2+1}{(x-1)\,(x-2)\,\blacksquare}\right|_{x=3}$$

On cache « $x-3$ »

$$= \frac{3^2+1}{(3-1)\,(3-2)}$$

$$= 5$$

$$\boxed{c=5}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{x^2+1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}}$$

c) $\boxed{\dfrac{1}{x\,(x-1)^2}}$

- Comme $\deg(1) = 0 < 3 = \deg\left(x\,(x-1)^2\right)$ et que le dénominateur est déjà écrit en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on peut appliquer directement le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sans effectuer de division euclidienne.
- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{x\,(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \qquad \text{avec } a,\ b \text{ et } c \text{ trois constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a, b et c :
  Pour ce faire, comme les éléments simples de cette décomposition de numérateur a et c ont pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer les coefficients a et c.

$$a = \left.\frac{1}{\blacksquare\,(x-1)^2}\right|_{x=0}$$

On cache « x »

$$= 1$$

$$\boxed{a=1}$$

$$c = \left.\frac{1}{x\,\blacksquare}\right|_{x=1}$$

$\uparrow$

On cache « $(x-1)^2$ »

$$= 1$$

$$\boxed{c=1}$$

Pour déterminer b, on ne peut pas appliquer la méthode du cache car « on diviserait pas 0 » si on « remplaçait x par 1 » dans chacun des membres de la dernière égalité de celles qui suivent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\,(x-1)^2} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\
(x-1) \times \frac{1}{x\,(x-1)^2} &= (x-1) \times \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}\right) \\
\frac{1}{x\,(x-1)} &= (x-1) \times \frac{a}{x} + (x-1) \times \frac{b}{x-1} + (x-1) \times \frac{c}{(x-1)^2} \\
\frac{1}{x\,(x-1)} &= (x-1) \times \frac{a}{x} + b + \frac{c}{x-1}
\end{aligned}$$

Comme la méthode du cache échoue quand l'élément simple correspondant a pour dénominateur une puissance non maximale d'un facteur irréductible (comme c'est le cas pour $\frac{b}{x-1}$ puisqu'il y a aussi l'élément simple $\frac{c}{(x-1)^2}$ dans cette décomposition), il faut trouver un autre moyen pour déterminer le coefficient b.
Pour ce faire, on peut par exemple remplacer x par 2 ou encore multiplier par x et faire tendre x vers $+\infty$.
N'utiliser qu'une seule de ces deux méthodes suffirait mais profitons de l'occasion pour les présenter toutes les deux sur cet exemple de détermination où la méthode du cache n'est plus efficace :

- <u>$1^{\text{ère}}$ méthode :</u> On évalue en 2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\,(x-1)^2} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\
\frac{1}{2\,(2-1)^2} &= \frac{a}{2} + \frac{b}{2-1} + \frac{c}{(2-1)^2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + b + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{b=-1}$$

- <u>$2^{\text{ème}}$ méthode :</u> On multiplie par x puis on fait tendre x vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\,(x-1)^2} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\
x \times \frac{1}{x\,(x-1)^2} &= x \times \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}\right) \\
\frac{1}{(x-1)^2} &= a + b\,.\,\frac{x}{x-1} + c\,.\,\frac{x}{(x-1)^2} \\
0 &= a + b \times 1 + c \times 0 \qquad \text{en faisant tendre } x \text{ vers } +\infty \\
0 &= a + b \\
0 &= 1 + b
\end{aligned}$$

$$\boxed{b=-1}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{1}{x\,(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}$$

d) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

- Comme $\deg(2x) = 1 < 2 = \deg\left(x^2+1\right)$, il n'y a pas lieu d'effectuer de division euclidienne.
- On écrit x^2+1 avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (et éventuellement un facteur constant) :

$$\boxed{x^2+1 = (x+i)\,(x-i)}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x}{(x+i)\,(x-i)}}$$

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{2x}{(x+i)\,(x-i)} = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{x-i} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a et b :
Pour ce faire, comme chacun des éléments simples de cette décomposition a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer chacun de ces coefficients.

$$a = \left.\frac{2x}{\blacksquare\,(x-i)}\right|_{x=-i}$$

On cache « $(x+i)$ »

$$= \frac{-2i}{-2i}$$

$$= 1$$

$$\boxed{a = 1}$$

$$b = \left.\frac{2x}{(x+i)\,\blacksquare}\right|_{x=i}$$

On cache « $(x-i)$ »

$$= \frac{2i}{2i}$$

$$= 1$$

$$\boxed{b = 1}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i}}$$

e) $\boxed{\dfrac{1}{x^2+x+1}}$

- Comme $\deg(1) = 0 < 2 = \deg\left(x^2+x+1\right)$, il n'y a pas lieu d'effectuer de division euclidienne.
- On écrit x^2+x+1 avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (et éventuellement un facteur constant) : $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3$ Comme $\Delta < 0$ et $x^2+x+1 \in \mathbb{R}[X]$, alors x^2+x+1 a deux racines complexes disctinctes conjuguées r_1 et r_2 qui sont :

$$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \qquad r_2 = \frac{-1-i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{j}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x-\overline{j}\right)(x-j)}}$$

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\left(x-\overline{j}\right)(x-j)} = \frac{a}{\left(x-\overline{j}\right)} + \frac{b}{(x-j)} \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a et b :
Pour ce faire, comme chacun des éléments simples de cette décomposition a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer chacun de ces coefficients.

$$a = \left.\frac{1}{\blacksquare\,(x-j)}\right|_{x=\overline{j}}$$

On cache « $\left(x-\overline{j}\right)$ »

$$= \frac{1}{\overline{j}-j}$$

$$= \frac{1}{-2i\mathscr{I}m(j)}$$

$$= \frac{i}{2\mathscr{I}m(j)}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{a = \frac{i}{\sqrt{3}}}$$

$$b = \left.\frac{1}{\left(x-\overline{j}\right)\blacksquare}\right|_{x=j}$$

On cache « $(x-j)$ »

$$= \frac{1}{j-\overline{j}}$$

$$= \frac{1}{2i\mathscr{I}m(j)}$$

$$= \frac{-i}{2\mathscr{I}m(j)}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{b = -\frac{i}{\sqrt{3}}}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{\frac{i}{\sqrt{3}}}{\left(x-\overline{j}\right)} - \frac{\frac{i}{\sqrt{3}}}{\left(x-j\right)}}$$

f) $\boxed{\dfrac{4}{\left(x^2+1\right)^2}}$

- Comme $\deg(4) = 0 < 4 = \deg\left(\left(x^2+1\right)^2\right)$, il n' y a pas lieu d'effectuer une division euclidienne.
- On écrit $\left(x^2+1\right)^2$ avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}\left(x^2+1\right)^2 &= ((x+i)(x-i))^2 \\ &= (x+i)^2(x-i)^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4}{(x+i)^2(x-i)^2}}$$

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{4}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{(x-i)^2} \qquad \text{avec } a, b, c \text{ et } d \text{ quatre constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a, b, c et d :
  Pour ce faire, comme les éléments simples de cette décomposition de numérateur b et d ont pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer les coefficients b et d.

$$b = \left.\frac{4}{\underbrace{\blacksquare}_{\text{On cache « }(x+i)^2\text{ »}}(x-i)^2}\right|_{x=-i}$$

$$= \frac{4}{4i^2}$$

$$= -1$$

$$\boxed{b = -1}$$

$$d = \left.\frac{4}{(x+i)^2\underbrace{\blacksquare}_{\text{On cache « }(x-i)^2\text{ »}}}\right|_{x=i}$$

$$= \frac{4}{4i^2}$$

$$= -1$$

$$\boxed{d = -1}$$

Dans cet exemple, il y encore deux coefficients qui ne peuvent pas être déterminés avec la méthode du cache. C'est pourquoi la méthode « multiplier par x et faire tendre x vers $+\infty$ » ne va cette pas suffire à elle seule à déterminer ces deux coefficients a et c. Cependant, elle reste utile car elle fournit une relation entre ces deux coefficients a et c :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x+i)^2(x-i)^2} &= \frac{a}{x+i} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{(x-i)^2} \\
x \times \frac{4}{(x+i)^2(x-i)^2} &= x \times \left(\frac{a}{x+i} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{(x-i)^2} \right) \\
4 \,.\, \frac{x}{(x+i)^2(x-i)^2} &= a \,.\, \frac{x}{x+i} + b \,.\, \frac{x}{(x+i)^2} + c \,.\, \frac{x}{x-i} + d \,.\, \frac{x}{(x-i)^2} \\
4 \,.\, 0 &= a \,.\, 1 + b \,.\, 0 + c \,.\, 1 + d \,.\, 0
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{0 = a + c}$$

Pour obtenir une autre relation vérifiée par a et c, on évalue en 0 (« On remplace x par 0. ») :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x+i)^2(x-i)^2} &= \frac{a}{x+i} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{(x-i)^2} \\
\frac{4}{(0+i)^2(0-i)^2} &= \frac{a}{0+i} + \frac{b}{(0+i)^2} + \frac{c}{0-i} + \frac{d}{(0-i)^2} \\
4 &= -ia - b + ic - d \\
4 &= -ia + 1 + ic + 1 \\
4 &= -ia - b + ic - d \\
2 &= -ia + ic \\
2i &= a - c
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{2i = a - c}$$

Ces deux relations permettent d'achever la détermination de a et c :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - c = 2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a = 2i \\ 2c = -2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = i \\ c = -i \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} a = i \\ c = -i \end{cases}}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{i}{x+i} - \frac{1}{(x+i)^2} - \frac{i}{x-i} - \frac{1}{(x-i)^2}}$$

g) $\boxed{\dfrac{3x-1}{x^2(x+1)^2}}$

- Comme $\deg(3x-1) = 1 < 4 = \deg\left(x^2(x+1)^2\right)$ et que le dénominateur est déjà écrit en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, on peut appliquer directement le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sans effectuer de division euclidienne.

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \qquad \text{avec } a,\ b \text{ et } c \text{ trois constantes complexes}}$$

- On détermine les coefficients a, b, c et d :
  Pour ce faire, comme les éléments simples de cette décomposition de numérateur b et d ont pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer les coefficients b et d.

$$b = \left.\frac{3x-1}{x^2 \blacksquare}\right|_{x=-1}$$

On cache « $(x+1)^2$ »

$$= -4$$

$$\boxed{b=-4}$$

$$d = \left.\frac{3x-1}{\blacksquare (x+1)^2}\right|_{x=0}$$

On cache « x^2 »

$$= -1$$

$$\boxed{d=-1}$$

Dans cet exemple, il y encore deux coefficients qui ne peuvent pas être déterminés avec la méthode du cache. C'est pourquoi la méthode « multiplier par x et faire tendre x vers $+\infty$ » ne va cette pas suffire à elle seule à déterminer ces deux coefficients a et c. Cependant, elle reste utile car elle fournit une relation entre ces deux coefficients a et c :

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \\
x \times \frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} &= x \times \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}\right) \\
x \times \frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} &= a \,.\, \frac{x}{x+1} + b \,.\, \frac{x}{(x+1)^2} + c \,.\, \frac{x}{x} + d \,.\, \frac{x}{x^2} \\
0 &= a \times 1 + b \times 0 + c \times 1 + d \times 0 \\
0 &= a + c
\end{aligned}$$

On obtient une première relation entre a et c :

$$\boxed{a+c=0}$$

Pour obtenir une autre relation vérifiée par a et c, on évalue en 1 (« On remplace x par 1. ») :

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \\
\frac{3 \times 1-1}{1^2(1+1)^2} &= \frac{a}{1+1} + \frac{b}{(1+1)^2} + \frac{c}{1} + \frac{d}{1^2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \,.\, a + \frac{1}{4} \,.\, b + c + d \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \,.\, a + \frac{1}{4} \,.\, (-4) + c + (-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\,.\,a+c-2\\ 1 &= a+2c-4\\ 5 &= a+2c\end{aligned}$$

On obtient une deuxième relation entre a et c :

$$\boxed{a+2c=5}$$

Ces deux relations permettent d'achever la détermination de a et c :

$$\begin{cases} a+c=0\\ a+2c=5\end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c=0\\ c=5\end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-5\\ c=5\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} a=-5\\ c=5\end{cases}}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{3x-1}{x^2\,(x+1)^2} = \frac{-5}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

h) $\boxed{\dfrac{1}{x^4+x^2+1}}$

- Comme $\deg(1) = 0 < 4 = \deg\left(x^4+x^2+1\right)$, il n'y a pas lieu d'effectuer de division euclidienne.
- On écrit x^4+x^2+1 avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:
  Pour ce faire, on reconnaît la forme suivante :

$$x^4+x^2+1 = \left(x^2\right)^2 + \left(x^2\right) + 1 = P\left(x^2\right) \qquad \text{où on a noté } P(y) = y^2+y+1$$

On factorise alors d'abord $P(y) = y^2+y+1$:

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3$$

Comme $\Delta < 0$ et $y^2+y+1 \in \mathbb{R}[X]$, alors y^2+y+1 a deux racines complexes disctinctes conjuguées r_1 et r_2 qui sont :

$$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \qquad\qquad r_2 = \frac{-1-i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{j}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y^2+y+1 &= \left(y-\overline{j}\right)(y-j)\\ \left(x^2\right)^2+\left(x^2\right)+1 &= \left(\left(x^2\right)-\overline{j}\right)\left(\left(x^2\right)-j\right)\\ x^4+x^2+1 &= \left(x^2-\overline{j}\right)\left(x^2-j\right)\\ x^4+x^2+1 &= \left(x^2-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(x^2-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\\ x^4+x^2+1 &= \left(x^2-\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2\right)\left(x^2-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\right)\\ x^4+x^2+1 &= \left(x+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{\left(x+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}}$$

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\left(x+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{a}{x+e^{-i\frac{\pi}{3}}} + \frac{b}{x-e^{-i\frac{\pi}{3}}} + \frac{c}{x+e^{i\frac{\pi}{3}}} + \frac{d}{x-e^{i\frac{\pi}{3}}} \qquad \text{avec } a,b,c,d\in\mathbb{C}}$$

- On détermine les coefficients a, b, c et d :
  Pour ce faire, comme chacun des éléments simples de cette décomposition a pour dénominateur la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer chacun de ces coefficients.

$$a = \frac{1}{\text{[redacted]}\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}\Bigg|_{x=-e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

On cache « $\left(x+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ »

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}\\
&= \frac{1}{\left(-2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}\\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{(-2)\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}\\
&= \frac{ie^{i\frac{\pi}{3}}}{8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\
&= \frac{ie^{i\frac{\pi}{3}}}{4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\\
&= \frac{i\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\sqrt{3}+i\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\sqrt{3}+i\right)}$$

On pourrait continuer comme ça mais, pour simplifier davantage les expressions, on va reprendre les calculs en notant comme dans la question e) :

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Cette notation simplifie les notations car on a :

$$\begin{cases} j^3 = 1\\ 1+j+j^2 = 0\\ \overline{j} = j^2\\ e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2\\ e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\overline{j}^2 = -j^4 = -j \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{\left(x+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} = \frac{1}{(x-j)(x+j)\left(x-j^2\right)\left(x+j^2\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}}$$

Avec cette notation de la racine cubique de l'unité j, l'application de la méthode du cache donne en effet des expressions beaucoup plus simples :

$$a = \left.\frac{1}{\text{[redacted]}\left(x+j\right)\left(x-j^2\right)\left(x+j^2\right)}\right|_{x=j}$$

On cache « $\left(x-j\right)$ »

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(j+j\right)\left(j-j^2\right)\left(j+j^2\right)}\\
&= \frac{1}{2j^3\left(1-j\right)\left(1+j\right)}\\
&= \frac{1}{2\left(1-j^2\right)}\\
&= \frac{1}{2\left(1+\left(1+j\right)\right)}\\
&= \frac{1}{2\left(2+j\right)}\\
&= \frac{\overline{2+j}}{2\left|2+j\right|^2}\\
&= \frac{2+\overline{j}}{2\left(\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}\\
&= \frac{2+j^2}{2\left(4+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}\\
&= \frac{2-1-j}{2\left(4+4\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)}\\
&= \frac{1-j}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = \frac{1-j}{6}}$$

Pour déterminer les trois autres coefficients plus simplement qu'en utilisant la méthode du cache, « on prend du recul » pour raisonner plus algébriquement en remarquant que la fractionnelle $F(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$ est paire et envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in \mathbb{R}$). Autrement dit, on remarque que :

$$\begin{cases} F(x) = F(-x) & F \text{ est pair} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \overline{F(x)} & F \text{ envoie } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Ces deux symétries de F se traduisent en relations simples sur les coeffcients de sa décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
F(x) = F(-x) &\iff \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2} = \frac{a}{-x-j}+\frac{b}{-x+j}+\frac{c}{-x-j^2}+\frac{d}{-x+j^2}\\
&\iff \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2} = \frac{-a}{x+j}+\frac{-b}{x-j}+\frac{-c}{x+j^2}+\frac{-d}{x-j^2}\\
&\iff \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2} = \frac{-b}{x-j}+\frac{-a}{x+j}+\frac{-d}{x-j^2}+\frac{-c}{x+j^2}\\
&\iff \begin{cases} b = -a \\ d = -c \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \overline{F(x)} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2} = \overline{\frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}=\frac{\overline{a}}{\overline{x-j}}+\frac{\overline{b}}{\overline{x+j}}+\frac{\overline{c}}{\overline{x-j^2}}+\frac{\overline{d}}{\overline{x+j^2}}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}=\frac{\overline{a}}{x-\overline{j}}+\frac{\overline{b}}{x+\overline{j}}+\frac{\overline{c}}{x-\overline{j}^2}+\frac{\overline{d}}{x+\overline{j}^2}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}=\frac{\overline{a}}{x-j^2}+\frac{\overline{b}}{x+j^2}+\frac{\overline{c}}{x-j^4}+\frac{\overline{d}}{x+j^4}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}=\frac{\overline{a}}{x-j^2}+\frac{\overline{b}}{x+j^2}+\frac{\overline{c}}{x-j}+\frac{\overline{d}}{x+j}\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{a}{x-j}+\frac{b}{x+j}+\frac{c}{x-j^2}+\frac{d}{x+j^2}=\frac{\overline{c}}{x-j}+\frac{\overline{d}}{x+j}+\frac{\overline{a}}{x-j^2}+\frac{\overline{b}}{x+j^2}\\
&\iff \begin{cases} c=\overline{a}\\ d=\overline{b}\end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les quatre relations suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} b=-a\\ d=-c\\ c=\overline{a}\\ d=\overline{b}\end{cases}}$$

Et de $a=\frac{1-j}{6}$, il découle :

$$\boxed{\begin{cases} a=\frac{1-j}{6}\\ b=-\frac{1-j}{6}\\ c=\frac{1-j^2}{6}\\ d=-\frac{1-j^2}{6}\end{cases}}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1-j}{x-j}-\frac{1-j}{x+j}+\frac{1-j^2}{x-j^2}-\frac{1-j^2}{x+j^2}\right)}$$

i) $\boxed{\dfrac{3}{\left(x^3-1\right)^2}}$

- Comme $\deg(3)=0<6=\deg\left(\left(x^3-1\right)^2\right)$, il n'y a pas lieu d'effectuer de division euclidienne.
- On écrit $\left(x^3-1\right)^2$ avec un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$:
  Pour ce faire, on se souvient que les racines de x^3-1 sont les racines cubiques de l'unité 1, $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\overline{j}=j^2=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(x^3-1\right)^2&=\left((x-1)(x-j)\left(x-\overline{j}\right)\right)^2\\
&=(x-1)^2(x-j)^2\left(x-\overline{j}\right)^2
\end{aligned}$$

  Donc :

$$\boxed{\frac{3}{\left(x^3-1\right)^2}=\frac{3}{(x-1)^2(x-j)^2\left(x-\overline{j}\right)^2}}$$

- D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a :

$$\boxed{\frac{3}{(x-1)^2(x-j)^2\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{(x-j)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}\qquad \text{avec } a,b,c,d,e,f\in\mathbb{C}}$$

- On détermine les coefficients a,b,c,d,e,f :
  Pour ce faire, comme les éléments simples de cette décomposition de numérateur b, d et f ont pour dénominateur

la puissance maximale d'un facteur irréductible, on peut utiliser la méthode du cache pour déterminer les coefficients b, d et f :

$$b = \left.\frac{3}{\text{[redacted]}\left(x-j\right)^2\left(x-\overline{j}\right)^2}\right|_{x=1}$$

On cache « $(x-1)^2$ »

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{\left(1-j\right)^2\left(1-\overline{j}\right)^2} \\
&= \frac{3}{\left(\left(1-j\right)\overline{\left(1-j\right)}\right)^2} \\
&= \frac{3}{\left|1-j\right|^4} \qquad \text{(via } z\overline{z} = |z|^2\text{)} \\
&= \frac{3}{\left|1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right|^4} \qquad \text{(On va factoriser par } e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ pour pouvoir appliquer une formule d'Euler.)} \\
&= \frac{3}{\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right|^4} \\
&= \frac{3}{\left(\underbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|}_{=1}\cdot\left|\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}}_{=-2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right|\right)^4} \\
&= \frac{3}{\left(\left|-2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|\right)^4} \\
&= \frac{3}{2^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4} \\
&= \frac{3}{3^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{3}}$$

Pour déterminer les autres coefficients plus simplement qu'en utilisant la méthode du cache, « on prend du recul » pour raisonner plus algébriquement en remarquant que la fractionnelle $F(x) = \frac{3}{\left(x^3-1\right)^2}$ est invariante sous les actions de $x \mapsto jx$ et de $x \mapsto \overline{j}x$ (i.e. $F(x) = F\left(jx\right)$ et $F(x) = F\left(\overline{j}x\right)$) et envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in \mathbb{R}$). Autrement dit, on remarque que :

$$\begin{cases}
F(x) = F\left(jx\right) & \text{invariance de } F \text{ sous l'action de } x \mapsto jx \\
F(x) = F\left(\overline{j}x\right) & \text{invariance de } F \text{ sous l'action de } x \mapsto \overline{j}x \\
\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \overline{F(x)} & F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}
\end{cases}$$

Ces trois symétries de F se traduisent en relations simples sur les coefficients de sa décomposition en éléments simples.
Par exemple, en exploitant l'invariance sous l'action de $x \mapsto jx$, on obtient :

$$\begin{aligned}
F(x) = F\left(jx\right) &\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2} = \frac{a}{jx-1}+\frac{b}{\left(jx-1\right)^2}+\frac{c}{jx-j}+\frac{d}{\left(jx-j\right)^2}+\frac{e}{jx-\overline{j}}+\frac{f}{\left(jx-\overline{j}\right)^2} \\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2} = \frac{a}{jx-j^3}+\frac{b}{\left(jx-j^3\right)^2}+\frac{c}{jx-j}+\frac{d}{\left(jx-j\right)^2}+\frac{e}{jx-j^2}+\frac{f}{\left(jx-j^2\right)^2} \\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2} = \frac{a}{j\left(x-j^2\right)}+\frac{b}{j^2\left(x-j^2\right)^2}+\frac{c}{j\left(x-1\right)}+\frac{d}{j^2\left(x-1\right)^2}+\frac{e}{j\left(x-j\right)}+\frac{f}{j^2\left(x-j\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{\overline{j}\,.\,a}{x-j^2}+\frac{\overline{j}^2\,.\,b}{(x-j^2)^2}+\frac{\overline{j}\,.\,c}{x-1}+\frac{\overline{j}^2\,.\,d}{(x-1)^2}+\frac{\overline{j}\,.\,e}{x-j}+\frac{\overline{j}^2\,.\,f}{(x-j)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{j^2\,.\,a}{x-j^2}+\frac{j\,.\,b}{(x-j^2)^2}+\frac{j^2\,.\,c}{x-1}+\frac{j\,.\,d}{(x-1)^2}+\frac{j^2\,.\,e}{x-j}+\frac{j\,.\,f}{(x-j)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{j^2\,.\,c}{x-1}+\frac{j\,.\,d}{(x-1)^2}+\frac{j^2\,.\,e}{x-j}+\frac{j\,.\,f}{(x-j)^2}+\frac{j^2\,.\,a}{x-\overline{j}}+\frac{j\,.\,b}{\left(x-\overline{j}\right)^2}\\
&\iff \begin{cases} a=j^2\,.\,c\\ b=j\,.\,d\\ c=j^2\,.\,e\\ d=j\,.\,f\\ e=j^2\,.\,a\\ f=j\,.\,b\end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque donc que l'on peut déjà déduire la détermination de d et de f depuis la détermination de b (que l'on a faite précédemment via la méthode du cache) :

$$\begin{cases} b=\frac{1}{3}\\ f=j\,.\,b=\frac{j}{3}\\ d=j\,.\,f=\frac{j^2}{3}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} b=\frac{1}{3}\\ d=\frac{j^2}{3}\\ f=\frac{j}{3}\end{cases}}$$

Malencontreusement, ces formules ne lient les coefficients non déterminables par la méthode du cache qu'entre eux. Il manque donc encore de l'inforrmation pour les déterminer.
Pour obtenir davantage d'information, on traduit alors la stabilité de $\mathbb{R}$ par F :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\overline{F(x)} &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\overline{\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{\overline{a}}{x-1}+\frac{\overline{b}}{(x-1)^2}+\frac{\overline{c}}{x-\overline{j}}+\frac{\overline{d}}{\left(x-\overline{j}\right)^2}+\frac{\overline{e}}{x-j}+\frac{\overline{f}}{(x-j)^2}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{\overline{a}}{x-1}+\frac{\overline{b}}{(x-1)^2}+\frac{\overline{e}}{x-j}+\frac{\overline{f}}{(x-j)^2}+\frac{\overline{c}}{x-\overline{j}}+\frac{\overline{d}}{\left(x-\overline{j}\right)^2}\\
&\iff \begin{cases} a=\overline{a}\\ b=\overline{b}\\ c=\overline{e}\\ d=\overline{f}\\ e=\overline{c}\\ f=\overline{d}\end{cases}
\end{aligned}$$

Malencontreusement, ces nouvelles formules ne lient encore une fois que les coefficients non déterminables par la méthode du cache (b, d et f) qu'entre eux.
On espère que la traduction de l'invariance de F sous l'action de $x\mapsto j^2x$ va enfin fournir des formules qui propagent l'information de la détermination d'un coefficient déterminable par la méthode du cache (b, d ou f) vers la détermination des coefficients non déterminables par la méthode du cache (a, c et e) :

$$\begin{aligned}
F(x)=F\left(j^2x\right) &\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{a}{j^2x-1}+\frac{b}{\left(j^2x-1\right)^2}+\frac{c}{j^2x-j}+\frac{d}{\left(j^2x-j\right)^2}+\frac{e}{j^2x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(j^2x-\overline{j}\right)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{a}{j^2x-j^3}+\frac{b}{(j^2x-j^3)^2}+\frac{c}{j^2x-j^4}+\frac{d}{(j^2x-j^4)^2}+\frac{e}{j^2x-j^2}+\frac{f}{(j^2x-j^2)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{a}{j^2(x-j)}+\frac{b}{j(x-j)^2}+\frac{c}{j^2(x-j^2)}+\frac{d}{j(x-j^2)^2}+\frac{e}{j^2(x-1)}+\frac{f}{j(x-1)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{\overline{j}^2\,.\,a}{x-j}+\frac{\overline{j}\,.\,b}{(x-j)^2}+\frac{\overline{j}^2\,.\,c}{x-j^2}+\frac{\overline{j}\,.\,d}{(x-j^2)^2}+\frac{\overline{j}^2\,.\,e}{x-1}+\frac{\overline{j}\,.\,f}{(x-1)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{j\,.\,a}{x-j}+\frac{j^2\,.\,b}{(x-j)^2}+\frac{j\,.\,c}{x-j^2}+\frac{j^2\,.\,d}{(x-j^2)^2}+\frac{j\,.\,e}{x-1}+\frac{j^2\,.\,f}{(x-1)^2}\\
&\iff \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-j}+\frac{d}{\left(x-j\right)^2}+\frac{e}{x-\overline{j}}+\frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2}=\frac{j\,.\,e}{x-1}+\frac{j^2\,.\,f}{(x-1)^2}+\frac{j\,.\,a}{x-j}+\frac{j^2\,.\,b}{(x-j)^2}+\frac{j\,.\,c}{x-j^2}+\frac{j^2\,.\,d}{(x-j^2)^2}\\
&\iff \begin{cases} a=j\,.\,e\\ b=j^2\,.\,f\\ c=j\,.\,a\\ d=j^2\,.\,b\\ e=j\,.\,c\\ f=j^2\,.\,d\end{cases}
\end{aligned}$$

On n'a donc pas la propagation d'information espérée mais on obtient tout de même neuf formules liant les coefficients non déterminables par la méthode du cache entre eux :

$$\begin{cases} a = j^2 \,.\, c \\ c = j^2 \,.\, e \\ e = j^2 \,.\, a \\ a = \overline{a} \\ c = \overline{e} \\ e = \overline{c} \\ a = j \,.\, e \\ c = j \,.\, a \\ e = j \,.\, c \end{cases}$$

Comme les trois premières relations sont équivalentes aux trois dernières, on ne dispose en fait seulement que de l'information suivante :

$$\begin{cases} a = \overline{a} \\ c = \overline{e} \\ e = \overline{c} \\ a = j \,.\, e \\ c = j \,.\, a \\ e = j \,.\, c \end{cases}$$

Comme la deuxième relation se déduit de la troisième et la quatrième relation se déduit des deux dernières, on ne dispose en fait seulement que de l'information suivante :

$$\begin{cases} a = \overline{a} \\ e = \overline{c} \\ c = j \,.\, a \\ e = j \,.\, c \end{cases}$$

Comme la deuxième relation se déduit se déduit des deux dernières, on ne dispose en fait seulement que de l'information suivante :

$$\begin{cases} a = \overline{a} \\ c = j \,.\, a \\ e = j \,.\, c \end{cases}$$

Toutes ces relations n'indiquent donc seulement que a, c, e sont les trois premiers termes d'une suite géométrique de raison j etde premier terme réel.
Cette information n'est donc pas suffisante pour déterminer tous les coefficients.
Pour obtenir davantage d'information, on évalue donc en 0 (i.e. « on remplace x par 0 ») :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(x-1)^2\left(x-j\right)^2\left(x-\overline{j}\right)^2} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-j} + \frac{d}{\left(x-j\right)^2} + \frac{e}{x-\overline{j}} + \frac{f}{\left(x-\overline{j}\right)^2} \\
\frac{3}{(0-1)^2\left(0-j\right)^2\left(0-\overline{j}\right)^2} &= \frac{a}{0-1} + \frac{b}{(0-1)^2} + \frac{c}{0-j} + \frac{d}{\left(0-j\right)^2} + \frac{e}{0-\overline{j}} + \frac{f}{\left(0-\overline{j}\right)^2} \\
\frac{3}{j^6} &= -a + b - j^2 c + j d - j e + j^2 f \\
3 &= -a + b - j^2 j a + j d - j j^2 a + j^2 f \qquad \text{(via les relations précédentes)} \\
3 &= -3a + b + j d + j^2 f \\
3 &= -3a + \frac{1}{3} + j\frac{j^2}{3} + j^2\frac{j}{3} \qquad \text{(via les déterminations de } b,\ d \text{ et } f\text{)} \\
3 &= -3a + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = -\frac{2}{3}}$$

On déduit alors immédiatement les valeurs de c et e des relations précédentes :

$$\begin{cases} c = -\frac{2j}{3} \\ e = -\frac{2j^2}{3} \end{cases}$$

- On conclut :

$$\boxed{\frac{3}{\left(x^3-1\right)^2}=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2j}{x-j}+\frac{j^2}{\left(x-j\right)^2}-\frac{2j^2}{x-\overline{j}}+\frac{j}{\left(x-\overline{j}\right)^2}\right)}$$