EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

S. Labopin

Table des matières

1 Équations différentielles linaires d'ordre 1

1.1 Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linaire homogène d'ordre 1

Théorème (Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1) **À savoir par cœur**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
On note (LH_1) l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$(LH_1) \ : \ y' + ay = 0$$

Soit A une primitive de a.
Alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (LH_1) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & C.e^{-A(t)} \end{array}, C \in \mathbb{C} \right\}$$

Commentaire : L'ensemble précédent se lit « L'ensemble des fonctions définies sur I de forme générale $t \mapsto C.e^{-A(t)}$ avec C une constante complexe ».

Exemple (Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1).
On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$xy' + y = 0 \tag{1}$$

⚠« x » est ici un abus de langage pour désigner la fonction $x \mapsto x$. Résoudre cette équation signifie « déterminer toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{C}$ » telles que $\forall x \in I, \ x.y'(x) + y(x) = 0$ pour un certain intervalle I.
On aimerait « diviser chaque membre par x » pour pouvoir appliquer le théorème.
Cependant, on ne peut le faire que pour $x \neq 0$.
Le théorème ne va donc nous permettre que de résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}^{-*}$ et pour $I = \mathbb{R}^{+*}$.
Ainsi, si on résout « sur un tel intervalle I », l'équation est équivalente à :

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \tag{2}$$

On applique le théorème pour $a : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Comme $A : x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de a, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de cette équation est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & C.e^{-\ln(|x|)} \end{array}, C \in \mathbb{C} \right\}$$

On peut simplifier la formule définissant ces fonctions :

$$\forall x \in I, \ C.e^{-\ln(|x|)} = C.e^{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} = \frac{C}{|x|}$$

En définitive :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} y: & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \frac{C}{x} \end{array}, C \in \mathbb{C} \right\}$$

On peut aussi vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur pour par exemple $I = \mathbb{R}^{+*}$:
Soit $C \in \mathbb{C}$.
On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ x\left(\frac{C}{x}\right)' + \frac{C}{x} &= x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} \\ &= -\left(\frac{C}{x}\right) + \frac{C}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles bien choisis :

1) $y' + y = 0$
2) $y' - 2xy = 0$
3) $(1+t)y' + y = 0$

1.2 Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec la méthode de variation de la constante

Quand le second membre de l'équation de la section précédente n'est pas nul (dans ce cas l'équation est dite « linéaire d'ordre 1 » mais plus « linéaire homogène d'ordre 1 »), on cherche d'abord une solution particulière en utilisant la dite « méthode de variation de la constante ».

Exemple (Méthode de variation de la constante) **Cette méthode est à savoir par cœur**

On souhaite déterminer une solution particulière sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle suivante :

$$L_1 \ : \ y' + \frac{1}{t}y = \frac{1-\ln(t)}{t^3}$$

Première étape : **On détermine une solution y_H de l'équation linéaire homogère associée.**
L'équation linéaire homogère (LH_1) associée à (L_1) est celle obtenue en remplaçant le membre de droite par « 0 » :

$$(LH_1) \ : \ y' + \frac{1}{x}y = 0 \tag{3}$$

Dans la section précédente, on a montré que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_H$ de l'équation LH_1 est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{C}{x} \end{array}, C \in \mathbb{C} \right\}$$

On en choisit une, par exemple « celle quand $C = 1$ » ; on la note y_H :

$$\begin{array}{cccc} y_H : & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Deuxième étape : **On cherche une solution particulière y_p de l'équation différentielle (L_1) sous la forme $y_p(t) = C(t).y_H(t)$, où $C : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (« Et non une constante ! »).**
Soit $C : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On note :

$$\forall t \in I, \ y_p(t) = C(t).y_H(t)$$

On raisonne par équivalence pour déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction C pour que y_p soit une solution sur I de l'équation différentielle (L_1) :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (L_1) \text{ sur } I &\iff \forall t \in I, \ y_p'(t) + \frac{1}{t}y_p(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ \left(C(t).y_H(t)\right)' + \frac{1}{t}C(t).y_H(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ C'(t).y_H(t) + C(t).y_H'(t) + \frac{1}{t}C(t).y_H(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ C'(t).y_H(t) + C(t) \underbrace{\left(y_H'(t) + \frac{1}{t}y_H(t)\right)}_{=0 \text{ car } y_H \text{ solution de } LH_1} = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ C'(t).y_H(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ C'(t).\frac{1}{t} = \frac{1-\ln(t)}{t^3} \\
&\iff \forall t \in I, \ C'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2} \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \int^t \frac{1-\ln(x)}{x^2}\,dx \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \left[(1-\ln(x))\left(-x^{-1}\right)\right]^t - \int^t \left(-x^{-1}\right)\left(-x^{-1}\right)dx \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \frac{\ln(t)-1}{t} - \int^t x^{-2}\,dx \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \frac{\ln(t)-1}{t} - \left[-x^{-1}\right]^t \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \frac{\ln(t)-1}{t} + \frac{1}{t} + \text{constante} \\
&\iff \forall t \in I, \ C(t) = \frac{\ln(t)}{t} + \text{constante}
\end{aligned}$$

« En prenant par exemple constante= 0, » on obtient que la fonction suivante est une solution particulière de l'équation différentielle (L_1) :

$$\begin{array}{cccc} y_p : & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t^2} \end{array}$$

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes après avoir choisi un intervalle de résolution :

1) $y' - xy = x$
2) $2xy' + y = x^{\frac{3}{2}}$
3) $xy' - 2y = -\ln(x)$
4) $x(x-1)y' + y = x^2$
5) $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$
6) $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$

1.3 Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 quand on connaît déjà une solution particulière

Théorème (Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1) **À savoir par cœur**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{C}$, $f : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues.
On note (L_1) l'équation différentielle suivante :

$$(L_1)\ :\ y' + ay = f$$

Soit A une primitive de a.
Soit y_p une solution particulière de (L_1) (On peut en déterminer une avec la méthode de variation de la constante comme dans l'exemple de la section précédente.).
Alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (L_1) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rccl} y : & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & y_p(t) + C.e^{-A(t)} \end{array} \ ,\ C \in \mathbb{C} \right\}$$

Exemple (Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1).
On reprend l'exemple de la section précédente.
On souhaite cette fois déterminer toutes les solutions sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle suivante (et pas seulement une seule solution) :

$$L_1\ :\ y' + \frac{1}{t}y = \frac{1 - \ln(t)}{t^3}$$

D'après la section précédente, la fonction suivante est une solution particulière de l'équation différentielle (L_1) :

$$\begin{array}{rccl} y_p : & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t^2} \end{array}$$

Et d'après l'exemple de la première section, la forme générale « $C.e^{-A(t)}$ » des solutions de l'équation linéaire homogène associée se simplifie en « $\frac{C}{t}$ ».
Donc d'après le théorème précédent, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation (L_1) sur $I =]0, +\infty[$ est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rccl} y : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t^2} + \frac{C}{t} \end{array} \ ,\ C \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour chacune des équations de la section précédente, déterminer l'ensemble de leurs solutions.

2 Équations différentielles linaires d'ordre 2 à coefficients réels constants

2.1 Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants

Théorème (Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants)

À savoir par cœur

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$.
On note (LH_2) l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$(LH_2) \ : \ ay'' + by' + cy = 0$$

On note : $\Delta = b^2 - 4ac$
On note $\mathscr{S}_H^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de (LH_2) qui sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles (« $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ »).
On note $\mathscr{S}_H^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions de (LH_2) qui sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes (« $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ »).
Alors on a :
Si $\Delta > 0$: Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes que l'on note r_1 et r_2.

$$\mathscr{S}_H^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\} \qquad \mathscr{S}_H^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $\Delta = 0$: Le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a qu'une seule racine r et celle-ci est réelle.

$$\mathscr{S}_H^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (C_1 t + C_2) e^{rt} \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\} \qquad \mathscr{S}_H^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (C_1 t + C_2) e^{rt} \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $\Delta < 0$: Le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines complexes distinctes conjuguées que l'on note $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$.

$$\mathscr{S}_H^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\} \qquad \mathscr{S}_H^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & e^{ut} (C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt)) \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Définition (Équation caractéristique associée à une équation différentielle linaire d'ordre 2 à coefficients réels constants)

À savoir par cœur

Dans l'énoncé du théorème précédent, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dont les solutions ont été notées r_1 et r_2 (ou r dans le cas où il n'y en a qu'une) est appelée l'**équation caractéristique**.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y = 0$
2) $y'' - 3y' + 2y = 0$
3) $y'' - 2y' + 5y = 0$
4) $y'' - 2y' + y = 0$
5) $y'' - y' + y = 0$

2.2 Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$

Quand le second membre de l'équation de la section précédente n'est pas nul (dans ce cas l'équation est dite « linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants » mais plus « linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants »), on peut chercher une solution particulière sous une certaine forme quand le second membre est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Méthode (Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$)

À savoir par cœur

Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On veut déterminer une solution particulière de l'équation (L_2) suivante :

$$(L_2)\ :\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\,e^{\lambda t}$$

Si λ n'est pas une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$:
On cherche une solution particulière de l'équation (L_2) sous la forme $y_p(t) = Q(t)\,e^{\lambda t}$ avec Q un polynôme de même degré que P.
Si λ est une racine simple du trinôme $ax^2 + bx + c$:
On cherche une solution particulière de l'équation (L_2) sous la forme $y_p(t) = tQ(t)\,e^{\lambda t}$ avec Q un polynôme de même degré que P.
Si λ est une racine double du trinôme $ax^2 + bx + c$:
On cherche une solution particulière de l'équation (L_2) sous la forme $y_p(t) = t^2Q(t)\,e^{\lambda t}$ avec Q un polynôme de même degré que P.

Déterminer une solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 9y = x + 1$
2) $y'' - 2y' + y = x$
3) $y'' - 5y' + 6y = te^t$
4) $2y'' - 6y' + 4y = te^{2t}$
5) $y'' - 6y' + 9y = e^{-t}$

2.3 Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand on connaît déjà une solution particulière

Théorème (Solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand on connaît déjà une solution particulière) **À savoir par cœur**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
On note (L_2) l'équation suivante :

$$(L_2)\ :\ ay'' + by' + cy = f(t)$$

Soit y_p une solution particulière de (L_2) (sur I).
Alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (L_2) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rccl} y: & I & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & y_p(t) + y_H(t) \end{array} \text{ , avec } y_H \text{ une solution de l'équation homogène } (LH_2) \text{ associée à } (L_2) \right\}$$

Résoudre les équations de la section précédente.

3 Quelques applications en physique

3.1 Dissolution d'un composé chimique

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20 g de ce composé, et on observe que 5 min plus tard, il reste 10 g.
Dans combien de temps restera-t-il seulement 1 g ?

3.2 Accroissement d'une population

L'accroissement d'une population P d'un pays est proportionnelle à cette population. La population double tous les 50 ans.
En combien de temps triple-t-elle ?

3.3 Chute libre verticale

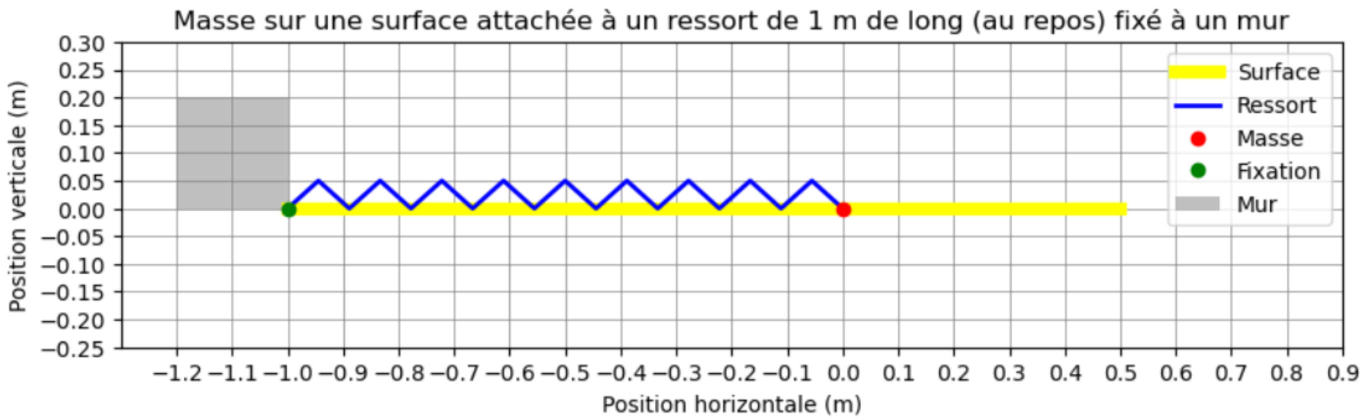
Un pot de fleurs initialement posé sur le rebord d'une fenêtre située à 5 mètres de hauteur tombe verticalement à cause d'un coup de vent. À quelle vitesse arrive-t-il au sol ?
On rappelle que : $g \approx 9,81\ m/s^2$

3.4 Chute verticale en parachute

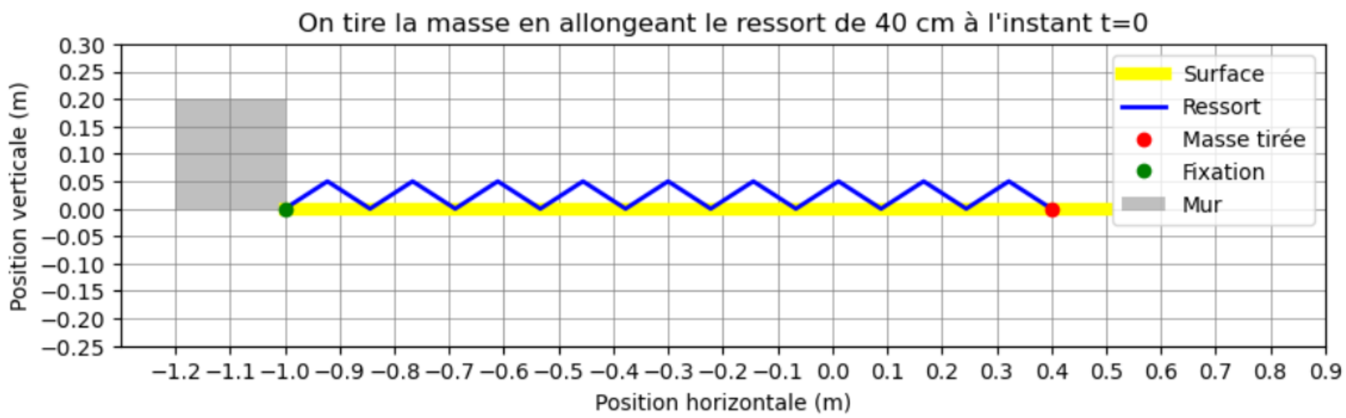
Déterminer la vitesse maximum en km/h d'un homme de 70 kg qui tombe verticalement en parachute sachant que la force de la résistance de l'air à l'instant t est de magnitude proportionnelle à sa vitesse en m/s à l'instant t avec pour coefficient de proportionnalité égal à $82,32\ kg/s$.
On rappelle que : $g \approx 9,81\ m/s^2$

3.5 Oscillateurs (Sujet rédactionnel typique au TOMIC)

Une masse m de 2 kg est posée sur une surface horizontale et est attachée à un ressort idéal de constante de raideur $k = 8\ N/m$ et de longueur au repos de 1 m. Ce ressort est fixé à un mur à son autre extrémité :



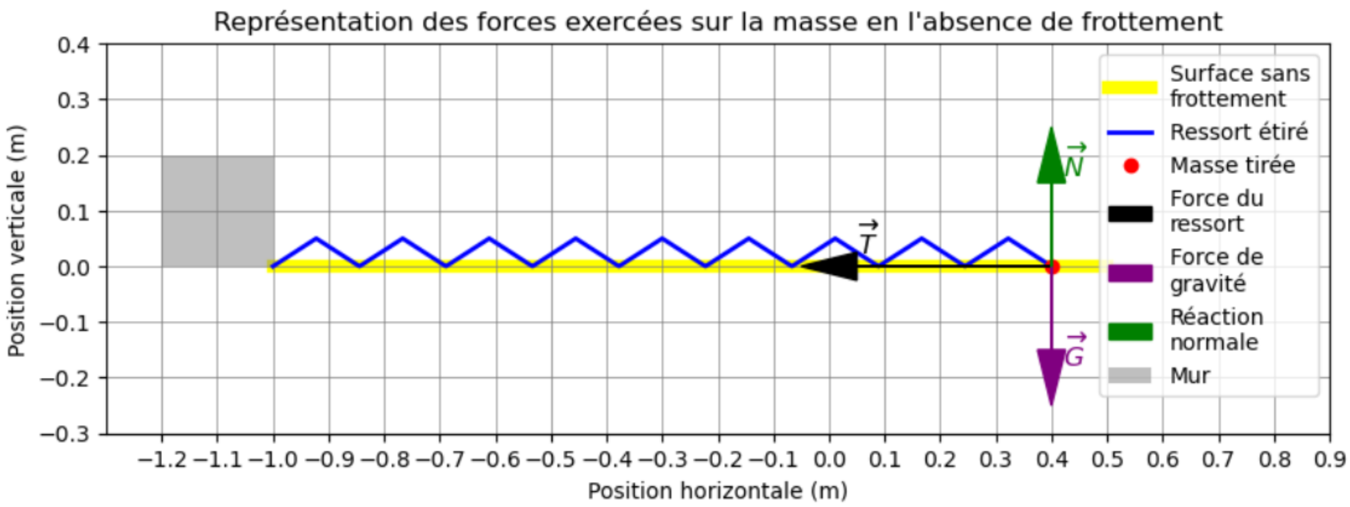
La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 40 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale.



I. **Sans frottement :**

On suppose que le système évolue sans frottement ni autres forces extérieures. La masse n'est donc soumise qu'aux trois forces suivantes :

- La force du ressort $\overrightarrow{T}$: Cette force agit toujours dans le sens opposé à la déformation du ressort. À l'instant $t = 0$, puisque le ressort est étiré, la force du ressort tente de ramener la masse vers la position de l'extrémité non fixé au mur du ressort quand celui-ci est au repos (n'est pas déformé). Elle est due à la loi de Hooke, qui stipule que la force exercée par un ressort est proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort par rapport à sa longueur au repos. Le coefficient de proportionnalité est appelé la constante de raideur.
- La force de gravité $\overrightarrow{G}$: Cette force agit verticalement vers le bas, attirant la masse vers le centre de la Terre. Elle est due à l'attraction gravitationnelle entre la masse de la Terre et la masse représentée en rouge.
- La réaction normale $\overrightarrow{N}$: C'est la force de support que la surface exerce sur la masse. La masse étant en contact avec la surface horizontale, cette force est verticale et dirigée vers le haut, exactement opposée à la force de gravité. Elle résulte du troisième principe de Newton, selon lequel à chaque action correspond une réaction égale et opposée. Cela signifie que si un objet exerce une force sur une surface, la surface exerce une force de magnitude égale mais de direction opposée sur l'objet.



Comme dans les figures, on se place dans le référenciel $\mathscr{R} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où :

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ représente la position de la masse quand le ressort est au repos.
- $\overrightarrow{i}$ représente le déplacement horizontal d'un mètre dans la direction où le ressort s'étire. Le ressort au repos est donc d'extrémités $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{j}$ représente le déplacement vertical d'un mètre vers le haut.

On note $M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$ la position de la masse à l'instant t dans le référenciel $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix}-kx(t)\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{R}} = -kx(t)\,\overrightarrow{i}$$

1. En appliquant la deuxième loi de Newton (appelée aussi le principe fondamental de la dynamique), on obtient :

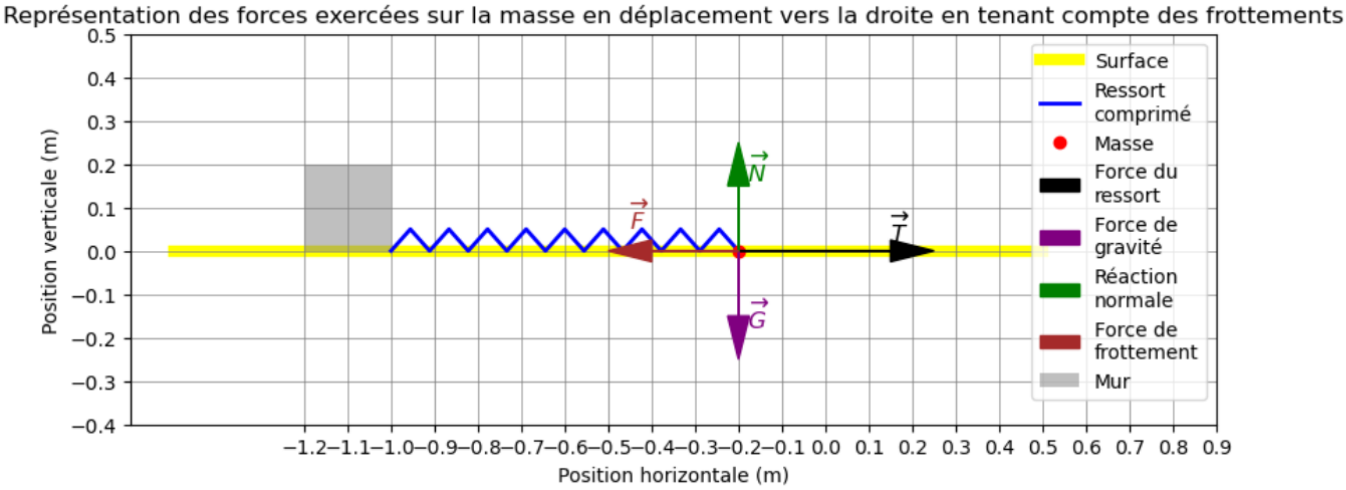
$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) + \overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{N}(t)$$
$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) \qquad \text{(car } \overrightarrow{N}(t) = -\overrightarrow{G}(t) \text{ d'après le troisième principe de Newton)}$$

   En déduire une équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

2. *a*) Déterminer l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente.
   b) Déterminer la ou les solutions de l'équation caractéristique.
   c) Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$.

II. **Avec frottement :** *(Questions bonus)*

On ajoute maintenant une force de frottement notée $\overrightarrow{F}$.



On suppose que :

$$\overrightarrow{F}(t) = -ax'(t)\,\overrightarrow{i} \qquad \text{où } a \text{ est une constante positive}$$

1. Déterminer une équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2. Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$ dans le cas où $a = 2\ kg/s$.

4 Quelques exercices supplémentaires plus difficiles

4.1 Utilisation des formules de trigonométrie et du principe de superposition

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$y'' + y = 2\cos^2$$

4.2 Détermination d'une équation différentielle à partir de la forme générale de ses solutions

Déterminer une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions y de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = Ae^{2x} + Be^{x} \text{ avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

4.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 <u>à coefficients réels non constants</u>

1) Démontrer que $x \mapsto x^2$ est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

2) Soit $z : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Démontrer que $x \mapsto xz(x)$ est une solution de l'équation précédente si et seulement si z' est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation de l'énoncé sur $\mathbb{R}^{+*}$.