COMPILATION D'EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT AU TOMIC

Exercice 1

On note :

- $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + z^2$
- $g(x,y,z) = x^3 y^4 z^2$
- $h(x,y,z) = e^{-2x}\cos(3y)\ln(4z)$

1) Calculer le gradiant des champs scalaires f, g et h.
2) Calculer le laplacien des champs scalaires f, g et h.

Exercice 2

On note :

- $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^3\overrightarrow{i} + 3xz^3\overrightarrow{j} - 3xz\overrightarrow{k}$
- $\overrightarrow{W}(x,y,z) = xy\overrightarrow{i} + 3yz\overrightarrow{j} + 2zx\overrightarrow{k}$
- $\overrightarrow{T}(x,y,z) = y^2\overrightarrow{i} + \left(3xz + y^4\right)\overrightarrow{j} + 4yz\overrightarrow{k}$

1) Calculer la divergence des champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{T}$.
2) Calculer le rotationnel des champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{T}$.

Exercice 3

Aux alentours d'un certain village, l'altitude en mètres en un point (x,y) d'une colline est donnée par :

$$h(x,y) = 10\left(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12\right)$$

où
y est la distance en km par rapport au nord du village et
x la distance par rapport à l'est de ce même village.

1) Où est situé le sommet de la colline ?
2) Quelle est l'altitude de la colline ?
3) Quelle est la raideur de la pente en pourcents en le point 1 km au nord et 1 km à l'est du village ?
4) En quel point la pente est-elle la plus raide et dans quelle direction ?

Exercice 4

La questions 1)b) a déjà été corrigée lors de l'ETS sur les intégrales multiples.

1) Via un changement de variables polaire, calculer :

   a)

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy \qquad \text{avec } D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0 < x^2+y^2\le 1\right\}$$

   b)

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad \text{avec } D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x\le 0\right\}$$

   <u>Indication :</u> Remarquer que D est un disque.

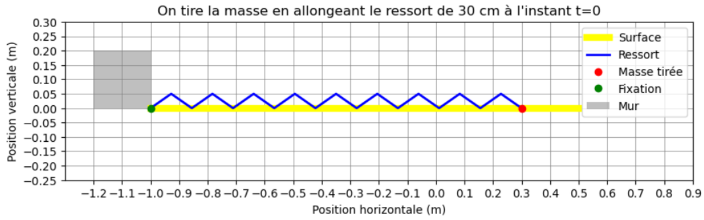
2) Via le changement de variables $\begin{cases} u = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$, calculer :

$$\iint_D (x+y)\,dxdy$$

avec D le domaine contenant l'origine et limité par le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{5}$ et la droite d'équation $x+y+3=0$

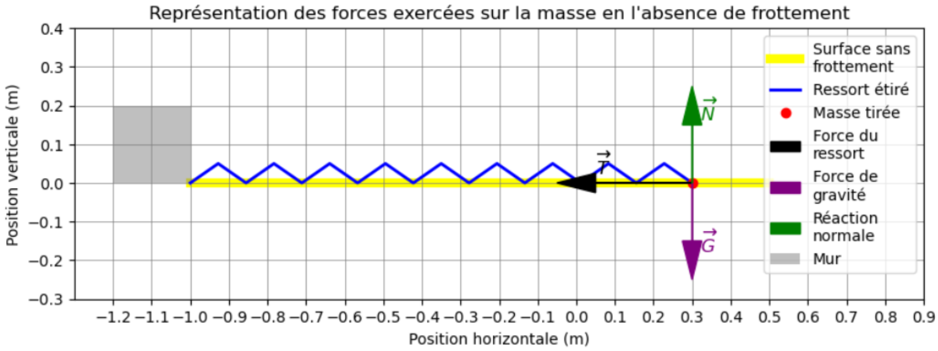
Exercice 5

Une masse m de 3 kg est posée sur une surface horizontale et est attachée à un ressort idéal de constante de raideur $k = 6$ N/m et de longueur au repos de 1 m. Ce ressort est fixé à un mur à son autre extrémité. La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 30 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale. La figure ci-contre représente alors cette expérience à l'instant $t = 0$.



I. Sans frottement :

On suppose que le système évolue sans frottement ni autres forces extérieures. La masse n'est donc soumise qu'aux trois forces représentées sur la figure ci-contre. Comme dans les figures, on se place dans le référenciel $\mathscr{R} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où :



- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ représente la position de la masse quand le ressort est au repos.
- $\vec{i}$ représente le déplacement horizontal d'un mètre dans la direction où le ressort s'étire. Le ressort au repos est donc d'extrémités $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- $\vec{j}$ représente le déplacement vertical d'un mètre vers le haut.

On note $M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$ la position de la masse à l'instant t dans le référenciel $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

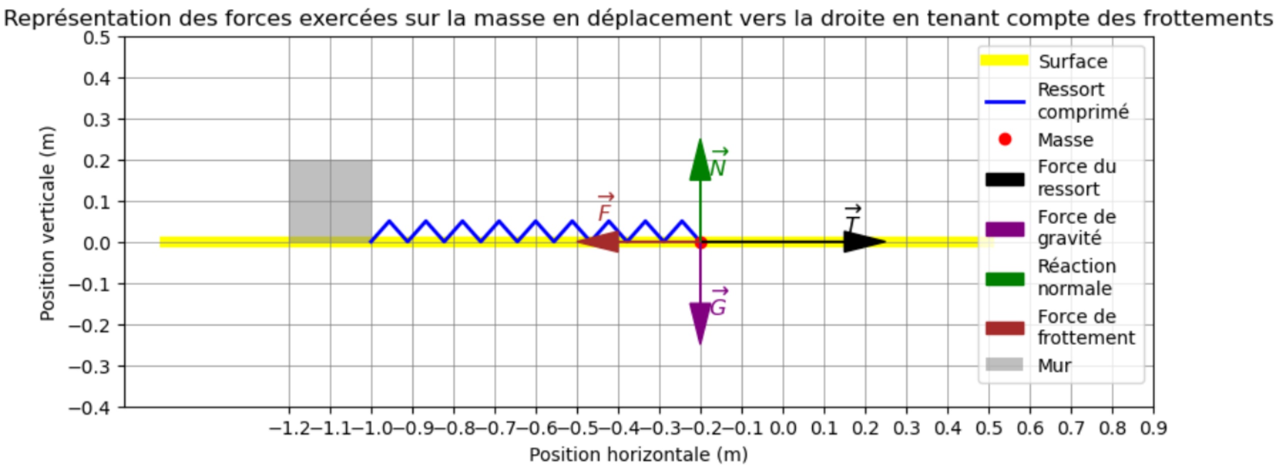
1) En appliquant la deuxième loi de Newton (appelée aussi le principe fondamental de la dynamique), déterminer une équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
2) *a*) Déterminer l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente.

   b) Déterminer la ou les solutions de l'équation caractéristique.

   c) Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$.

II. Avec frottement :

On ajoute maintenant une force de frottement notée $\vec{F}$.



On suppose que :

$$\vec{F}(t) = -ax'(t)\,\vec{i} \qquad \text{où } a \text{ est une constante positive}$$

1) Déterminer une équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2) Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$ dans le cas où $a = 3$ kg/s.

Exercice 6

Les trois premières questions (jusqu'à 2)a) inclus) ont déjà été corrigées lors de l'ETS sur les oscillateurs harmoniques.

Une masse de 2 kg est attachée à un ressort vertical de constante de raideur $k = 8\ N/m$ et de longueur au repos de 1 m fixé à l'autre extrémité à un plafond fixe. On néglige les frottements de l'air.
On se repère via le reprère cartésien représenté ci-contre et on note $f(t)$ l'ordonnée de la masse à l'instant t.

1) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer une équation différentielle dont f est solution.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(t)$ en précisant le phaseur, l'amplitude et la phase initiale de son terme cosinusoïdal et tracer f avec *Python* et *Jupyter* :

   a) La masse est lâchée à l'instant $t = 0$ comme sur la figure et sans vitesse initiale.

   b) À l'instant $t = 0$, la masse est lâchée sans vitesse initiale et le ressort est au repos.

   c) À l'instant $t = 0$, le ressort est au repos et la masse se déplace vers le bas en parcourant 1 mètre pas seconde.

   d) $f(0) = \frac{2}{5}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.