DEUXIÈME TEST TYPE TOMIC SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1) Déterminer l'expression de la solution du problème de Cauchy formé par l'équation différentielle $y' + y = x + 1$ et la condition initiale $y(0) = 2$:

   A- $y(x) = x$
   B- $y(x) = x + 2e^{-x}$
   C- $y(x) = x^2 + 2e^{-x}$
   D- $y(x) = x^2 - \left(x^2 - x\right) + 3 + e^{-x}$
   E- $y(x) = 2e^{-x}$

2) Donner une expression de la solution homogène de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$:

   A- $y(x) = \lambda e^{-ix} + \mu e^{ix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
   B- $y(x) = \left(\lambda x + \mu\right) e^{x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   C- $y(x) = e^{-x}\left(\lambda x + \mu\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   D- $y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   E- $y(x) = e^{-x}\left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

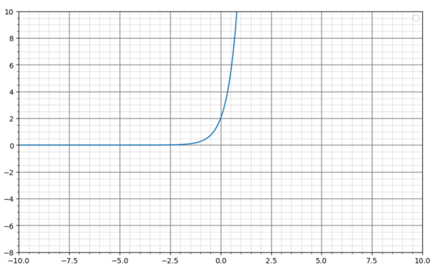
3) On note (E) le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ (E)\ :\ y'(x) + 2xy(x) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

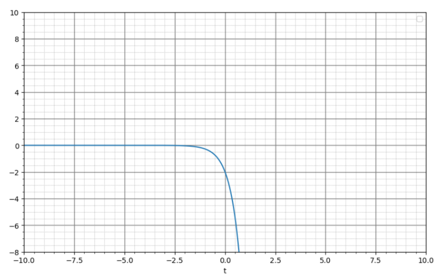
   La résolution de l'équation différentielle permet d'avoir la forme des solutions générales : $y(x) = Ce^{-x^2}$.
   Déterminer la valeur de C.

4) Parmi les propositions suivantes, identifier la représentation graphique de la solution du problème de Cauchy suivant :

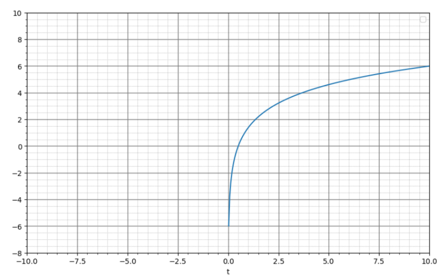
$$\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$



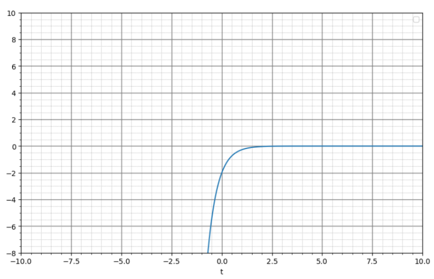
A



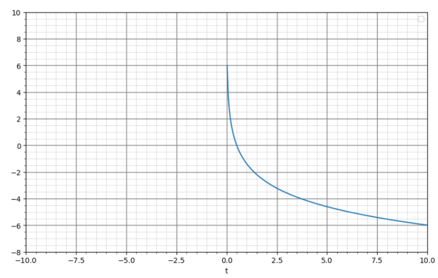
B



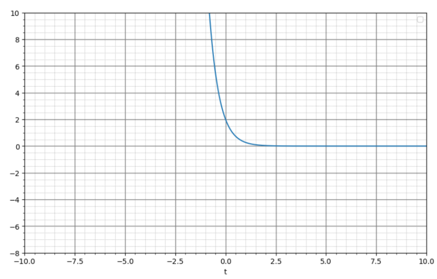
C



D



E



F

5) Identifier l'affirmation exacte :

A- La solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ s'obtient en multipliant une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre associée.

B- On appelle équation linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation de la forme $ay'' + by' + cy = d(t)$ où a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$) et d une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

C- La solution générale de l'équation $a(t)\,y'(t)+b(t)\,y(t) = c(t)$ s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation avec second membre aux solutions générales de l'équation sans second membre associée.

D- Si a, b sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si a ne s'annule pas sur I alors l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0$ est l'ensemble des fonctions définies par $y(t) = ke^{-f(t)}$ où k est un réel quelconque et f la fonction définie sur I par $f(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$.

E- L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation $a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t)$.

6) La solution complète sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''(x) - 9y(x) = x$ est donnée par l'expression :

A- $y(x) = e^{3x}(\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)) - \frac{x}{9}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

B- $y(x) = \lambda_1 e^{3(1-\sqrt{3})x} + \lambda_2 e^{3(1+\sqrt{3})x} - \frac{x}{9}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

C- $y(x) = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{3x} - \frac{x}{9}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

D- $y(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)\,e^{3x} - \frac{x}{9}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

E- $y(x) = \lambda_1 e^{-3ix} + \lambda_2 e^{3ix} - \frac{x}{9}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

7) Un cycliste roule sur une route descendante, rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse en m/s à l'instant t (en s). On suppose que la fonction v ainsi définie est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que v est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ 3y' + y = 15$.
On suppose que le cycliste d'élance avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire $v(0) = 0$.
Quelle est l'affirmation vraie ?

A- Après avoir résolu l'équation différentielle, on peut trouver l'accélération en fonction du temps en intégrant la vitesse.

B- Une vitesse limite peut être calculée et elle vaut 5.

C- La solution de l'équation différentielle est une fonction décroissante sur $[0;+\infty[$.

D- Une vitesse limite peut être calculée et elle vaut 15.

E- L'équation différentielle qui décrit le mouvement est non linéaire d'ordre 1 avec second membre. On peut résoudre analytiquement le problème.