TEST TYPE TOMIC SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES

1) Soit l'intégrale double : $\int_0^{\ln(2)}\left(\int_0^1 x^3 e^y dx\right)dy$.
Donner la valeur de l'intégrale arrondie au centième.

2) Soit l'intégrale double : $\int_0^{\ln(2)}\left(\int_0^1 e^y dx\right)dy$.
Donner la valeur de l'intégrale.

3) Soit l'intégrale suivante $\iint_D (x+y)3^{x+y}dxdy$ avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0;2]\ ;\ y\in[1;2]\}$
Mettez dans l'ordre chronologique les étapes suivantes pour déterminer sa valeur :

A- On utilise une intégration par partie sur deux intégrales simples :

$$\int_0^2 x3^x dx = \left[x\frac{3^x}{\ln(3)}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{3^x}{\ln(3)}dx = \frac{18}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)}\left[\frac{3^x}{\ln(3)}\right]_0^2 = \frac{18}{\ln(3)} - \frac{8}{(\ln(3))^2}$$
$$\int_1^2 y3^y dy = \left[y\frac{3^y}{\ln(3)}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{3^y}{\ln(3)}dy = \frac{15}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)}\left[\frac{3^y}{\ln(3)}\right]_1^2 = \frac{15}{\ln(3)} - \frac{6}{(\ln(3))^2}$$

B- On finalise :

$$\iint_D (x+y)3^{x+y}dxdy = \frac{228}{(\ln(3))^2} - \frac{96}{(\ln(3))^3}$$

C- On sépare les variables :

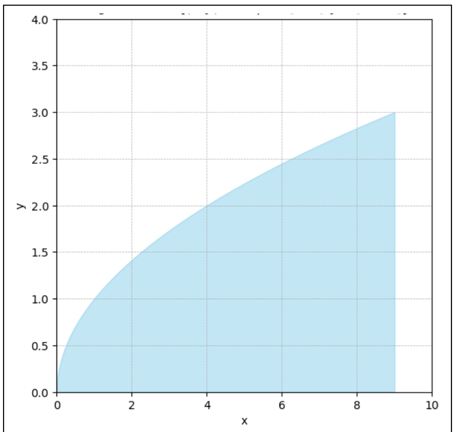
$$\iint_D x3^x3^y dxdy + \iint_D y3^y3^x dxdy = \int_0^2 x3^x dx\int_1^2 3^y dy + \int_1^2 y3^y dy\int_0^2 3^x dx$$

D- On utilise la linéarité de l'intégrale :

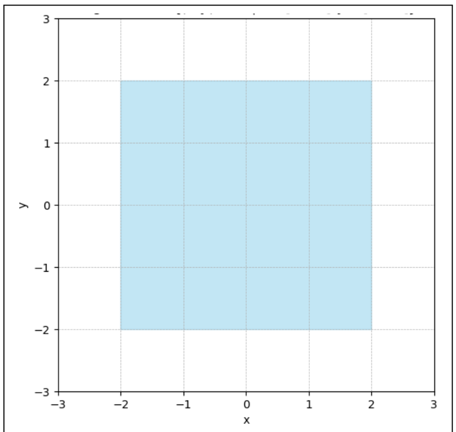
$$\iint_D (x+y)3^{x+y}dxdy = \iint_D x3^x3^y dxdy + \iint_D y3^y3^x dxdy$$

4) Associer les régions suivantes avec leur représentation graphique :

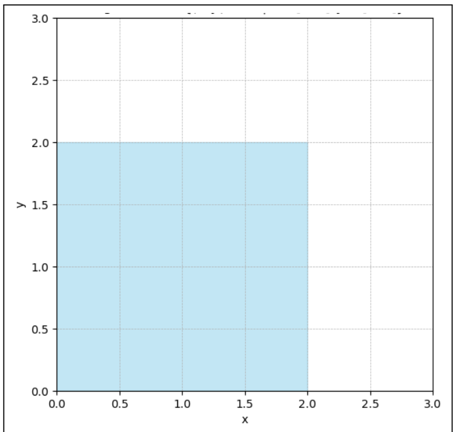
A- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0;9]\ ;\ y\in[0;\sqrt{x}]\}$
B- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0;1]\ ;\ y\in[x^2;\sqrt{x}]\}$
C- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0;4]\ ;\ y\in[-\sqrt{x};\sqrt{x}]\}$
D- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-2;2]\ ;\ y\in[-2;2]\}$
E- $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0;2]\ ;\ y\in[0;2]\}$



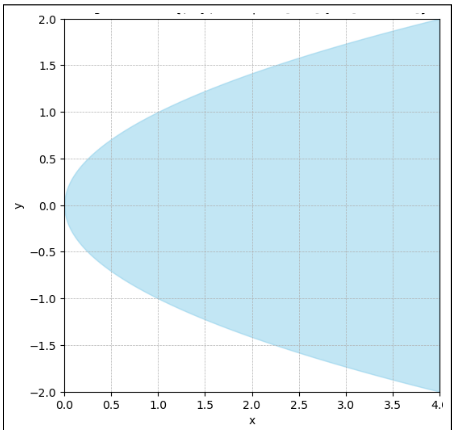
A



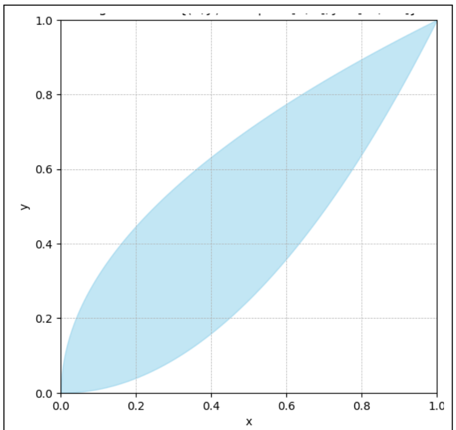
B



C

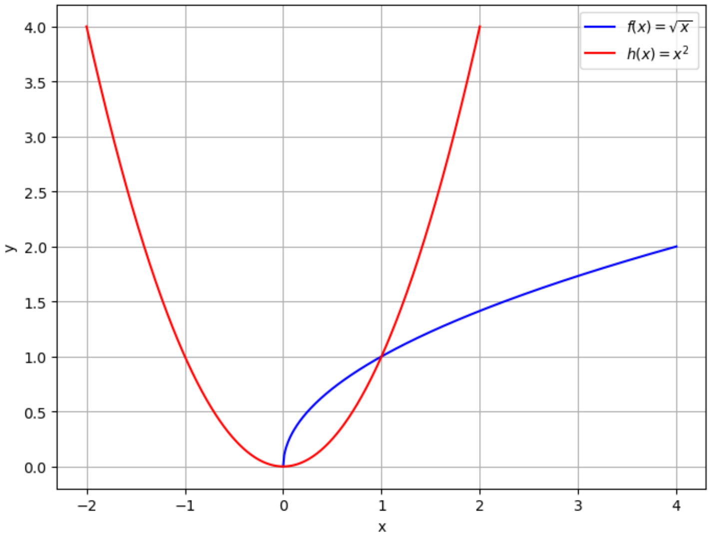


D



E

5) Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $h(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.
Leurs représentations graphiques sont :



Déterminer la valeur de l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_h$ entre les bornes 0 et 1 au centième.

6) On souhaite calculer l'aire du domaine $D = D_1 \setminus D_2$ (D_1 privé de D_2).

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \in [-2;2] \ ; \ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\} \qquad D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \in [-1;1] \ ; \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Identifier la valeur de l'intégrale parmi ces propositions :

A- 0
B- $\frac{5\pi}{2}$
C- 3π
D- $\frac{3\pi}{2}$
E- $\frac{-3\pi}{2}$

7) Soit un signal périodique modélisé par la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$ sur $I = [-1;1]$.
Donner la valeur moyenne du signal sur l'intervalle I.