EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

S. Labopin

Table des matières

1 Convention de notation de ce document **2**

2 Rudiment de topologie de $\mathbb{R}^2$ - Limite finie et continuité d'une fonction de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$ **2**
Rudiments de topologie métrique de $\mathbb{R}^2$ 2
Limite **finie** et continuité d'une fonction de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$ 3

3 Fonctions partielles et dérivées partielles d'une fonctions de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$ **5**

4 Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de deux variables en un point et applications **6**
4.1 Théorème de Taylor-Young à l'ordre 1 6
4.2 Applications 7
4.2.1 Approximation affine et différentielle d'une fonction de deux variables en un point 7
4.2.2 Détermination d'une équation du plan tangent à la représentation graphique d'une fonction de deux variables en un point 9

5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, théorème de Schwarz, fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et opérations **9**

6 Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de deux variables en un point et application **11**
6.1 Théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 et notations de Monge 11
6.2 Application à l'optimisation : Recherche d'extrema d'une fonction de deux variables 13

7 Dérivées partielles d'une composée, changement de variable et application à la résolution d'équations aux dérivées partielles **15**
7.1 Règle de la chaîne et changement de variables 15
7.2 Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles 19
7.2.1 Se ramener à une équation plus simple avec un changement de variable et la règle de la chaîne 19
7.2.2 Application à la résolution de l'équation des cordes vibrantes 21

8 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables et application à la résolution de l'équation des ondes **22**
8.1 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables 22
8.2 Application à la résolution de l'équation des ondes 25

1 Convention de notation de ce document

- $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désignent des points du plan $\mathbb{R}^2$.
  On les note aussi parfois (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x, y).
- U désigne **un ouvert** de $\mathbb{R}^2$.
  Ce terme est défini dans ce document ; en bref, chacun de ses points est le centre d'un disque inclus dans U.
- f désigne une fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est donc une fonction de deux variables :

$$f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

- En toute rigueur, la notation « $f(x, y)$ » désigne le réel associé au point (x, y) par la fonction f. Cependant, on commet souvent l'abus de langage consistant à écrire « $f(x, y)$ » pour parler de la fonction f et non de l'image du point (x, y) par la fonction f.

2 Rudiment de topologie de $\mathbb{R}^2$ - Limite finie et continuité d'une fonction de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$

Rudiments de topologie métrique de $\mathbb{R}^2$

Définition (distance euclidienne entre deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$)

- On appelle **distance euclidienne** entre M_1 et M_2 et on note $d(M_1, M_2)$ ou $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$ le nombre réel positif suivant :

$$\boxed{d(M_1, M_2) = d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

- Soit $r > 0$.
  On appelle **boule ouverte** centrée en $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon r et on note $B(M_0, r)$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ qui sont à une distance de M_0 **strictement** inférieure à r, c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$\boxed{B(M_0, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M_0, M) < r\right\}}$$

Exemple (distance euclidienne entre deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$)

- $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
- $d\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \geq 4$ donc le point $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à la boule ouverte de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.
- $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ donc $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 3\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < 3\right\}$

1) On note :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{2(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2} + 3 \end{array}$$

Soit $\mathscr{E} > 0$.

a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\mathscr{E}}{2}\right) \setminus \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

i) Démontrer que :

$$|y - 2| < \frac{\mathscr{E}}{2}$$

ii) Démontrer que :

$$\left(d\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\right)^2 \geq (x-1)^2$$

iii) Démontrer que :

$$\left|g(x,y)-3\right| < \mathcal{E}$$

Définition (voisinage d'un point de $\mathbb{R}^2$ et ouvert de $\mathbb{R}^2$)
Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que V est **un voisinage** de M_0 lorsqu'il existe une boule ouverte centrée en M_0 et incluse dans V.
  Autrement dit :

$$V \text{ est un voisinage de } M_0 \iff \exists\, r>0 \mid B(M_0,r)\subset V$$

- On dit que V est **un ouvert** lorsque V est un voisinage de chacun de ses points.
  Autrement dit :

$$V \text{ est un ouvert} \iff \forall\, M\in V,\ V \text{ est un voisinage de } M \iff \forall\, M\in V,\ \exists\, r>0 \mid B(M,r)\subset V$$

2) On note :

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$E_1=B\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},2\right) \qquad E_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x\right\} \qquad E_3=\left\{M\in\mathbb{R}^2 \mid d(A_2,M)\leq 1\right\} \qquad E_4=\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[\times\left]\frac{1}{2},2\right[$$

$$E_5=\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[\times\left]\frac{1}{2},2\right] \qquad E_6=\mathbb{R}^2 \qquad E_7=\mathbb{R}^2\setminus E_2 \qquad E_8=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \qquad E_9=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$$

a) Pour chacun des ensembles E_k et pour chacun des points A_l déterminer si E_k est un voisinage de A_l.
b) Pour chacun des ensembles E_k, déterminer si E_k est un ouvert.

Définition (adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$)
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.
On appelle **adhérence de E**, l'ensemble noté $\overline{E}$ suivant :

$$\overline{E}=\left\{M\in\mathbb{R}^2 \mid \forall\, r>0,\ B(M,r)\cap E\neq\emptyset\right\}$$

Exemple-« suite de l'exercice » (adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$)
2) *c*) Déterminer chacun des ensembles $\overline{E_k}$.

Limite finie et continuité d'une fonction de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$

Définition (limite **finie** d'une fonction de deux variables **en un point de l'adhérence de son domaine de définition**)
(Si cette définition est difficile à comprendre, s'aider de la définition alternative et plus intuitive suivante.)

Soient $(x_0,y_0)\in\overline{U}$ et $l\in\mathbb{R}$.
On dit que f **tend vers l quand M tend vers M_0** et on note « $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=l$ » ou « $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$ » lorsque :

$$\underbrace{\forall\,\mathcal{E}>0,\ \exists\, r>0 \mid \forall\, M\in B(M_0,r)\cap U,\ \left|f(M)-l\right|<\mathcal{E}}$$

Pour toute distance $\mathcal{E}$ aussi petite soit-elle, il existe une distance r telle que pour tout point M situé à une distance de M_0 strictement plus petite que r, le nombre $f(M)$ est situé à une distance du nombre $f(M_0)$ strictement plus petite que $\mathcal{E}$.

C'est dernière assertion peut s'écrire aussi :

$$\forall\,\mathcal{E}>0,\ \exists\, r>0 \mid \left(\text{si } M\in U \text{ et } d(M_0,M)<r \text{ alors } \left|f(M)-l\right|<\mathcal{E}\right)$$

Exemple-« suite de l'exercice » (limite **finie** d'une fonction de deux variables en un point de l'adhérence de son domaine de définition)

3) Dans la question 1)a), on a en fait déterminé une telle limite.
Expliquer cela en complétant ce qui suit :

Pour toute distance $\mathscr{E}$ aussi petite soit-elle, il existe une distance $r =$ **...** *telle que pour tout point (x, y) situé à une distance de* **...** *strictement plus petite que r, le nombre $f(M)$ est situé à une distance du nombre $f(M_0)$ strictement plus petite que $\mathscr{E}$.*
Autrement dit :

$$\forall\ \mathscr{E} > 0,\ \exists\ r = \mathbf{...} > 0\ \mid\ \forall\ M \in B(\mathbf{...}, r) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\},\ |f(M) - \mathbf{...}| < \mathscr{E}$$

Autrement dit :

$$\lim_{M \to \mathbf{...}} g(M) = \mathbf{...}$$

4) On note :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

a) Démontrer que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\},\ h(x, y) \leq 4 \times d\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

<u>Indication :</u> On a $2|xy| \leq x^2 + y^2$ car $x^2 + y^2 - 2|xy| = |x|^2 + |y|^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$

b) Soit $\mathscr{E} > 0$.
On note $r = \frac{\mathscr{E}}{4}$.
Soit $(x, y) \in B\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \frac{\mathscr{E}}{4}\right) \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.
Démontrer que :

$$|h(x, y)| < \mathscr{E}$$

c) Qu'a-t-on démontré dans la question précédente en terme de limite ?

5) *a*) On note : $f(x, y) = ((x + y)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
Déterminer si f admet une limite finie en $(0;0)$.

« Définition intuitive » (limite **finie** d'une fonction de deux variables en un point)
Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f tend vers l quand M tend vers M_0 et on note « $\lim_{M \to M_0} f(M) = l$ » ou « $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l$ » lorsque

le nombre $f(x, y)$ se rapproche du nombre l quand le point (x, y) se rapproche du point (x_0, y_0).

⚠ L'expression « se rapprocher du point (x_0, y_0) » ici sous-entend « **se rapprocher** du point (x_0, y_0) **par n'importe quel chemin** » (voir exemple intuitif suivant).

« Exemple intuitif-suite de l'exercice » (limite **finie** d'une fonction de deux variables en un point)

5) *b*) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

i) Calculer $f(x, 2x)$.
ii) En déduire vers quel nombre se rapproche le nombre $f(x, y)$ quand le point (x, y) se rapproche du point $(0, 0)$ le long de la droite d'équation $y = 2x$?
iii) Calculer $f(x, x)$.
iv) En déduire vers quel nombre se rapproche le nombre $f(x, y)$ quand le point (x, y) se rapproche du point $(0, 0)$ le long de la droite d'équation $y = x$?
v) La fonction f admet-elle une limite finie quand (x, y) tend vers $(0, 0)$?

5) *c*) $f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$
Déterminer si f admet une limite finie en $(0,0)$.
Indication : Déterminer la limite de $f(x,x)$ quand x tend vers 0.

Définition (continuité d'une fonction de deux variables **en un point de son domaine de définition**)
Soit $(x_0,y_0)\boldsymbol{\in U}$.
On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue au point** $\boldsymbol{(x_0,y_0)}$ lorsque :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

6) *a*) On note :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\end{array}$$

Démontrer que la fonction g est continue au point $(0,0)$.

b) On note :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\end{array}$$

i) Calculer $f(t,t)$.
ii) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

3 Fonctions partielles et dérivées partielles d'une fonctions de deux variables en un point de $\mathbb{R}^2$

Définition (**fonction partielle** d'une fonction de deux variables)
On appelle **fonction partielle** de f une fonction (d'une seule variable) de l'une des deux formes suivantes :

$f_{x,y_0}: x\mapsto f(x,y_0)$ avec y_0 un réel « fixé » $\qquad$ $f_{x_0,y}: y\mapsto f(x_0,y)$ avec x_0 un réel « fixé »

Afin d'éviter des confusions, on peut éviter d'employer par exemple comme ci-dessus la même lettre « x » pour désigner deux choses différentes en utilisant plutôt les notations suivantes :

$f_{\bullet,y_0}: x\mapsto f(x,y_0)$ avec y_0 un réel « fixé » $\qquad$ $f_{x_0,\bullet}: y\mapsto f(x_0,y)$ avec x_0 un réel « fixé »

Exemple-exercice (fonction partielle d'une fonction de deux variables)

1) On note :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^y\ln(x)\end{array} \qquad \begin{array}{rccl} h: & \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x>y\right\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^y\ln(x-y)\end{array}$$

a) Compléter :

$$\begin{array}{rccl} g_{x,2}: & \dots & \to & \mathbb{R} \\ & \dots & \mapsto & \dots\end{array} \quad \begin{array}{rccl} g_{1,y}: & \dots & \to & \mathbb{R} \\ & \dots & \mapsto & \dots\end{array} \quad \begin{array}{rccl} h_{x,3}: & \dots & \to & \mathbb{R} \\ & \dots & \mapsto & \dots\end{array} \quad \begin{array}{rccl} h_{3,\bullet}: & \dots & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \dots\end{array}$$

Définition (dérivée partielle d'une fonction de deux variables en un point)
Soit $(x_0, y_0) \in U$.

- Si la fonction $f_{x,y_0} : x \mapsto f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, alors on dit que la fonction f admet une dérivée partielle en (x_0, y_0) par rapport à x et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{x,y_0}(x_0) = f'_{\bullet,y_0}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f_{x,y_0}(x) - f_{x,y_0}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

- Si la fonction $f_{x_0,y} : y \mapsto f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, alors on dit que la fonction f admet une dérivée partielle en (x_0, y_0) par rapport à y et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0,y}(y_0) = f'_{x_0,\bullet}(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f_{x_0,y}(y) - f_{x_0,y}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Exemple-exercice (dérivée partielle d'une fonction de deux variables en un point)

1) *b)* Compléter :

i) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = g'_{\ldots,\ldots}(\ldots)$
$\forall y \in \mathbb{R},\ g'_{\ldots,\ldots}(y) = \ldots$
Donc : $\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = \ldots$

ii) $\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = g'_{\ldots,\ldots}(\ldots)$
$\forall \ldots \in \mathbb{R},\ g'_{\ldots,\ldots}(y) = \ldots$
Donc : $\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = \ldots$

4 Développement limité d'ordre 1 d'une fonction de deux variables en un point et applications

4.1 Théorème de Taylor-Young à l'ordre 1

Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1)
Si f est une fonction de deux variables, définie et de classe $\mathscr{C}^1$ dans un voisinage de M_0, alors :

$$\boxed{f(M) = f(M_0) + \overrightarrow{grad} f(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} + d(M_0, M)\,\mathscr{E}(M) \qquad \text{avec } \lim_{M\to M_0} \mathscr{E}(M) = 0}$$

Autrement écrit :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + d\big((x_0, y_0), (x, y)\big)\,\mathscr{E}(x, y) \qquad \text{avec } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathscr{E}(x, y) = 0$$

Autrement écrit :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + d\big((x_0, y_0), (x, y)\big)\,\mathscr{E}(x, y) \qquad \text{avec } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathscr{E}(x, y) = 0$$

Exemple (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1)

La fonction $f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^2}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage du point $(-1,1)$. Donc, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, on a :

$$f(x,y)=f(-1,1)+(x+1)\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)+d\big((-1,1),(x,y)\big)\mathscr{E}(x,y) \qquad \text{avec} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\mathscr{E}(x,y)=0$$

On calcule $f(-1,1)$, $\overrightarrow{grad} f(x,y)$ puis $\overrightarrow{grad} f(-1,1)$:

$$f(-1,1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \qquad \text{Autrement dit : } \overrightarrow{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\\ \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=\frac{3}{2} \qquad \text{Autrement dit : } \overrightarrow{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Donc :

$$f(x,y)=2-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{3}{2}(y-1)+d\big((-1,1),(x,y)\big)\mathscr{E}(x,y) \qquad \text{avec} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\mathscr{E}(x,y)=0$$

4.2 Applications

4.2.1 Approximation affine et différentielle d'une fonction de deux variables en un point

Définitions et interprétation (approximation affine et différentielle d'une fonction de deux variables en un point)

En reprenant les notations du théorème de Taylor-Young à l'ordre 1 :

- On appelle **approximation affine de f en (x_0,y_0)** l'approximation suivante :

$$\boxed{f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

À savoir par cœur

- En notant $(x-x_0,y-y_0)=(h,k)$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0+h,y_0+k)=\overbrace{\overbrace{f(x_0,y_0)}^{\text{terme constant}}+\underbrace{\overbrace{h\,.\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\,.\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}^{\text{terme linéaire}}}_{\substack{df(x_0,y_0)(h,k)\\ \text{image de }(h,k)\text{ par la différentielle de } f \text{ en } (x_0,y_0)}}}^{\text{PARTIE AFFINE DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ}}+\underbrace{\overbrace{\sqrt{h^2+k^2}\,.\,\mathscr{E}(h,k)}^{\text{terme négligeable devant la partie affine du développement limité}}}_{o(h,k)} \qquad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)}\mathscr{E}(h,k)=0$$

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)(h,k)+o(h,k)$$

- La fonction $(h,k)\mapsto f(x_0+h,y_0+k)$ est la somme
  - de la fonction constante $(h,k)\mapsto f(x_0,y_0)$,
  - de la fonction linéaire $df(x_0,y_0)\ :\ (h,k)\mapsto df(x_0,y_0)(h,k)$,
  - et d'une fonction $(h,k)\mapsto o(h,k)$ négligeable devant la fonction $(h,k)\mapsto\sqrt{h^2+k^2}$, la distance entre M_0 et M.
- $o(h,k)$ est négligeable devant l'approximation affine, c'est l'erreur commise en faisant l'approximation affine.
- **La fonction linéaire $df(x_0,y_0)$ est appelée la différentielle de f en (x_0,y_0)** :

$$\begin{array}{rccl} df(x_0,y_0)\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ & \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=h\,.\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\,.\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{array}$$

Exemple (approximation affine et différentielle d'une fonction de deux variables en un point)
On reprend l'exemple précédent « (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1) » $f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^2}$:

$$f(x,y)=2-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{3}{2}(y-1)+d((-1,1),(x,y))\mathscr{E}(x,y) \quad \text{avec} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\mathscr{E}(x,y)=0$$

- L'approximation affine de f au point $(-1,1)$ est :

$$f(x,y)\approx 2-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{3}{2}(y-1)$$

- En notant $(x-x_0,y-y_0)=(h,k)$, la fonction $(h,k)\mapsto f(-1+h,1+k)$ s'écrit comme la somme d'une fonction affine (qui est elle-même la somme de la fonction constante $(h,k)\mapsto f(-1,1)$ et de la fonction linéaire $df(-1,1)$) et d'une fonction négligeable o :

$$f(-1+h,1+k)=2-\frac{1}{2}h+\frac{3}{2}k+o(h,k)$$

- En notant $(x-x_0,y-y_0)=(h,k)$, l'approximation affine de f au point $(-1,1)$ s'écrit :

$$f(-1+h,1+k)\approx 2-\frac{1}{2}h+\frac{3}{2}k$$

- La différentielle de f au point $(-1,1)$ est la fonction linéaire $df(-1,1)$: $(h,k)\mapsto -\frac{1}{2}h+\frac{3}{2}k$

1) On souhaite faire l'approximation affine de la fonction $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$ autour du point $M_0=(x_0,y_0)=(1;1)$ afin d'en déduire une valeur approchée du nombre $f(0{,}997;1{,}002)=\frac{0{,}997\times0{,}997}{1{,}002}$.
   a) Déterminer le déplacement (h,k) tel que :
   $$(0{,}997;1{,}002)=(x_0+h,y_0+k)$$
   b) Calculer $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$, le gradient de f.
   c) Calculer $\overrightarrow{\nabla}f(x_0,y_0)$, le gradient de f au point (x_0,y_0).
   d) En déduire l'approximation affine de f au point (x_0,y_0).
   ⚠Dans certains examens, on écrit « interpolation linéaire » plutôt que « approximation affine ».
   e) En déduire une valeur approchée du nombre $\frac{0{,}997\times0{,}997}{1{,}002}$.
   f) Calculer l'erreur relative d'interpolation de cette approximation du nombre $\frac{0{,}997\times0{,}997}{1{,}002}$.

Rappel (erreur relative d'une approximation)

$$\boxed{\text{erreur relative d'une approximation}=\left|\frac{\text{valeur approchée} - \text{valeur exacte}}{\text{valeur exacte}}\right|}$$

À savoir par cœur

2) Faire l'approximation affine de la fonction $f(x,y)=x(1-y)^3$ autour du point $M_0=(x_0,y_0)=(2;3)$ afin d'en déduire une valeur approchée du nombre $f(2{,}001;2{,}998)=2{,}001\times(1-2{,}998)^3$ puis calculer l'erreur relative d'interpolation correspondante.
3) Faire l'approximation affine de la fonction $f(x,y)=\frac{3x+1}{(1-2y)(1-x)}$ autour du point $M_0=(x_0,y_0)=(0;0)$ afin d'en déduire une valeur approchée du nombre $f(-0{,}002;0{,}003)=\frac{3\times(-0{,}002)+1}{(1-2\times0{,}003)(1-(-0{,}002))}$ puis calculer l'erreur relative d'interpolation correspondante.

4.2.2 Détermination d'une équation du plan tangent à la représentation graphique d'une fonction de deux variables en un point

Méthode (à partir de l'approximation affine d'une fonction f de deux variables en un point (x_0, y_0), déduire une équation du plan tangent à la représentation graphique de cette fonction au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$)

Lorsqu'on a l'approximation affine d'une fonction f de deux variables en un point (x_0, y_0) :

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Alors on peut aisément écrire une équation du plan tangent à la représentation graphique de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{est une équation du plan tangent à la représentation graphique de } f \text{ en } (x_0, y_0, f(x_0, y_0))}$$

À savoir par cœur

1) On reprend l'exemple précédent $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ pour lequel on a déjà déterminé l'approximation affine au point $(-1, 1)$:

$$f(x,y) \approx 2 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{3}{2}(y-1)$$

On note $\mathscr{S}$ la représentation graphique de f.
Compléter :

a) $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(x, y, \textbf{...})$.

b) $(x, y, z) \in \mathscr{S} \iff z = \textbf{...}$

c) $\mathscr{S}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = \textbf{...} \right\}$$

d) $\textbf{...} = 2 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{3}{2}(y-1)$ est une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point **....**

2) On note $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ et $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

a) Déterminer l'approximation affine de f au point (x_0, y_0).

b) En déduire une équation du plan tangent à la représentation graphique de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, théorème de Schwarz, fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et opérations

Définition (continuité d'une fonction de deux variables, fonctions de classe $\mathscr{C}^0$)

- On dit que f est continue sur U lorsque, pour tout point $(x_0, y_0) \in U$, f est continue au point (x_0, y_0).
  Autrement dit, f est continue sur U lorsque :

$$\forall (x_0, y_0) \in U, \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

- On dit aussi que f est **de classe $\mathscr{C}^0$ sur U** lorsque **f est continue sur U**.

Définition (fonctions dérivées partielles d'ordre 1, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$)

- Lorsque, pour tout $M = (x, y) \in U$, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au point $M = (x, y)$, on définit alors la fonction de deux variables suivante que l'on appelle **fonction dérivée partielle** de f sur U par rapport à x :

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}} : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(M) \end{array}$$

  On définit de la même façon $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$, la fonction dérivée partielle de f sur U par rapport à y.

- On dit aussi que f est **de classe $\mathscr{C}^1$** sur U lorsque les fonctions dérivées partielles $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ **sont définies sur U et continues sur U**.

Définition (fonctions dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe $\mathscr{C}^2$)

- On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^2$ sur U** lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U **et que ses fonctions dérivées partielles sont elles aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur U**.
- **Les fonctions dérivées partielles des fonctions dérivées partielles de f** sont appelées **les fonctions dérivées partielles d'ordre 2** sont notées comme suit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \text{la fonction dérivée partielle par rapport à } x \text{ de la fonction } \frac{\partial f}{\partial x}\\
\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \text{la fonction dérivée partielle par rapport à } y \text{ de la fonction } \frac{\partial f}{\partial x}\\
\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \text{la fonction dérivée partielle par rapport à } x \text{ de la fonction } \frac{\partial f}{\partial y}\\
\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \text{la fonction dérivée partielle par rapport à } y \text{ de la fonction } \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

- Autrement dit, on dit que f est **de classe $\mathscr{C}^2$** sur U lorsque les fonctions dérivées partielles $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$, $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}$, $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$ **sont définies sur U et continues sur U**.

Théorème de Schwarz **À savoir par cœur**

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Propriété (régularité des fonctions rationnelles)

Les fonctions rationnelles à deux variables sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur domaine de définition.

Exemples (régularité des fonctions rationnelles)

- La fonction g suivante est de classe $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition car c'est une fonction rationnelle :

$$g: \begin{array}{ccc} \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 2y \text{ et } x^3\neq xy^2\right\} & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \frac{7xy^6-3x^3y-9}{(x-2y)(x^3-2xy^2)(1+x^2y^2)}\end{array}$$

- La fonction g suivante est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & 7xy^6-3x^3y-9\end{array}$$

Définition (fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^k$)

Soient $k\in\{0,1,2\}$, V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et **g une fonction** définie sur V et **à valeurs dans $\mathbb{R}^2$**.
On peut alors noter $g_1(x,y)$ et $g_2(x,y)$ **ses fonctions composantes** :

$$g: \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}\boldsymbol{g_1(x,y)}\\ \boldsymbol{g_2(x,y)}\end{pmatrix}\end{array}$$

On dit que g est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur V** lorsque **les fonctions composantes g_1 et g_2** sont toutes les deux **de classe $\mathscr{C}^k$ sur V**.

Propriété (fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ et opérations)

Soit $k\in\{0,1,2\}$.
Une somme, une différence, un produit, un quotient ou une composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) est de classe $\mathscr{C}^k$ sur son ensemble de définition.

Exemples (fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ et opérations)
Soit $k \in \{0,1,2\}$.
On note :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{y}{x}\cos(xy) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \cos(xy) \end{pmatrix} \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & xy \end{array}$$

- Les fonctions composantes de g sont $g_1(x,y) = \frac{y}{x}$ et $g_2(x,y) = \cos(xy)$.
- La fonction h est de classe $\mathscr{C}^k$ car c'est une fonction polynomiale.
- La fonction g_2 est de classe $\mathscr{C}^k$ car c'est la composée des fonctions cos et h qui sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^k$:

$$g_2 = \cos \circ h \qquad \text{C'est-à-dire : } g_2(x,y) = \cos(h(x,y))$$

- La fonction g_1 est de classe $\mathscr{C}^k$ car c'est une fonction rationnelle.
- La fonction g est de classe $\mathscr{C}^k$ car ses fonctions composantes g_1 et g_2 sont toutes les deux de classes $\mathscr{C}^k$.
- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ car c'est la composée des fonctions h et g qui sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^k$:

$$f = h \circ g \qquad \text{C'est-à-dire : } f(x,y) = h(g(x,y))$$

- En particulier, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$).

1) On note :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

a) On a déja démontré dans 4) de la section 2 que g est continue en 0. On l'admet donc dans cette question sans démonstration.
Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$ (On rappelle encore que « continue sur $\mathbb{R}^2$ » veut dire la même chose que « de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$ »).

b) Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 2 en utilisant notamment le théorème de Schwarz pour faire moins de calcul.

6 Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de deux variables en un point et application

6.1 Théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 et notations de Monge

Notation (**Notations de Monge**)
Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0),

- on note les composantes de la dite **matrice jacobienne de f en (x_0, y_0)** comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{q} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{matrice jacobienne de } f \text{ en } (x_0,y_0)} \qquad \text{Autrement dit : } \underbrace{\boxed{\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \mathbf{q} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}}}_{\textbf{À savoir par cœur}}$$

- et on note les composantes de la dite **matrice hessienne de f en (x_0, y_0)** comme suit en n'utilisant seulement trois lettres car $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ via le théorème de Schwarz :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{matrice hessienne de } f \text{ en } (x_0,y_0)} \qquad \text{Autrement dit : } \underbrace{\boxed{\begin{cases} \mathbf{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \\ \mathbf{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \mathbf{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{cases}}}_{\textbf{À savoir par cœur}}$$

Remarque (un produit de deux matrice et un produit de trois matrices remarquables)

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = ph + qk \qquad \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = rh^2 + 2shk + tk^2$$

Théorème (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Si f est une fonction de deux variables, définie et de classe $\mathscr{C}^2$ dans un voisinage de M_0, alors :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = ph + qk + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{\text{voir notation de Monge et remarque précédente}}$$

$$+ \left(h^2+k^2\right) . \mathscr{E}(h,k) \qquad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \mathscr{E}(h,k) = 0$$

Autrement écrit :

$$f(x_0+h, y_0+k) = \overbrace{f(x_0, y_0)}^{\text{partie constante}} + \overbrace{p \,.\, \mathbf{h} + q \,.\, \mathbf{k}}^{\text{partie linéaire}} + \overbrace{\frac{r}{2} \,.\, \boldsymbol{h^2} + s \,.\, \boldsymbol{hk} + \frac{t}{2} \,.\, \boldsymbol{k^2}}^{\text{partie quadratique}}$$

$$+ \underbrace{\left(h^2+k^2\right) . \mathscr{E}(h,k)}_{\text{négligeable devant } h^2+k^2} \qquad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \mathscr{E}(h,k) = 0$$

À savoir par cœur

Exemple (approximation polynomiale de degré 2 d'une fonction de deux variables en un point)

On reprend l'exemple $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$.

On a déjà calculé $f(-1,1)$, $\vec{\nabla} f(x,y)$ puis $\vec{\nabla} f(-1,1)$ pour obtenir de développement limité à l'ordre 1 de f en $(-1,1)$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}} \\ \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \end{pmatrix} \qquad f(x,y) = 2 - \frac{1}{2}(x+1) + \frac{3}{2}(y-1) + d((-1,1),(x,y))\mathscr{E}(x,y) \qquad \text{avec} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathscr{E}(x,y) = 0$$

On calcule maintenant les fonctions dérivées partielles d'ordre 2 de f puis les nombres r, s et t :

⚠ r, s et t dépendent du point d'étude (x_0, y_0) ; dans cet exemple c'est $(x_0, y_0) = (-1;1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right)}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+3y^2} - x \,.\, \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{x^2+3y^2} = \frac{x^2+3y^2-x^2}{\left(x^2+3y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3y^2}{\left(x^2+3y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right)}{\partial y} = \frac{-3xy}{\left(x^2+3y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right)}{\partial y} = \frac{3\sqrt{x^2+3y^2} - 3y \,.\, \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{x^2+3y^2} = \frac{3\left(x^2+3y^2\right) - 9y^2}{\left(x^2+3y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2}{\left(x^2+3y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1;1) = \frac{3 \times 1^2}{\left((-1)^2 + 3 \times 1^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1;1) = \frac{-3 \times (-1) \times 1}{\left((-1)^2 + 3 \times 1^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8}$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1;1) = \frac{3 \times (-1)^2}{\left((-1)^2 + 3 \times 1^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8}$$

On obtient ainsi le développement limité d'ordre 2 de f au point $(-1;1)$:

$$f(-1+h, 1+k) = \underbrace{\overbrace{2}^{\text{partie constante}} + \overbrace{\frac{-1}{2} \,.\, \mathbf{h} + \frac{3}{2} \,.\, \mathbf{k}}^{\text{partie linéaire}} + \overbrace{\frac{3}{4} \,.\, \boldsymbol{h^2} + \frac{3}{8} \,.\, \boldsymbol{hk} + \frac{3}{4} \,.\, \boldsymbol{k^2}}^{\text{partie quadratique}}}_{\text{approximation de } f \text{ au voisinage de } (-1;1) \text{ avec une } \textbf{interpolation polynomiale de degré 2}}$$

$$+ \underbrace{\left(h^2+k^2\right) . \mathscr{E}(h,k)}_{\text{négligeable devant } h^2+k^2} \qquad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \mathscr{E}(h,k) = 0$$

1) On note : $g(x,y) = -\cos(x)\cos(y)$

   a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de g au point $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

   b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de g au point $(0;0)$.

6.2 Application à l'optimisation : Recherche d'extrema d'une fonction de deux variables

Motivation
Par exemple, si x et y sont des paramètres que l'on peut choisir et que $f(x,y)$ est le bénéfice d'une entreprise, il est intéressant de déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles ce bénéfice est maximal.
On cherche donc **à déterminer en quels points (x,y) la fonction f atteint son maximum ou son minimum et quelle est la valeur de ce maximum ou de ce minimum**.

Définition (maximum local, maximum global, minimum local et minimum global d'une fonction de deux variables)
Soit $(x_0, y_0) \in U$.

- On dit que **$f(x_0, y_0)$ est un maximum local de** f ou on dit que **f atteint un maximum local en $f(x_0, y_0)$** lorsque :

$$\text{Il existe un voisinage } V \text{ de } (x_0,y_0) \text{ tel que : } \forall\ (x,y) \in V,\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

- On dit que **f atteint son maximum en (x_0, y_0)** ou on dit que $f(x_0, y_0)$ est le maximum **global** de f lorsque :

$$\forall\ \boldsymbol{(x,y) \in U},\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

- On dit que **$f(x_0, y_0)$ est un minimum local de** f ou on dit que **f atteint un minimum local en $f(x_0, y_0)$** lorsque :

$$\text{Il existe un voisinage } V \text{ de } (x_0,y_0) \text{ tel que : } \forall\ (x,y) \in V,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

- On dit que **f atteint son minimum en (x_0, y_0)** ou on dit que $f(x_0, y_0)$ est le minimum **global** de f lorsque :

$$\forall\ \boldsymbol{(x,y) \in U},\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

- Un **extremum** est un maximum ou un minimum. Au pluriel, ses mots deviennent « **extrema** », « **maxima** » et « **minima** ».

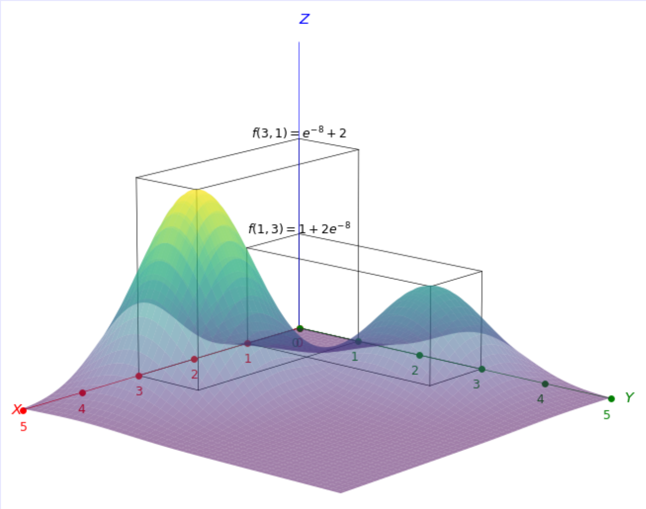
Exemple-exercice (maximum local, maximum global, minimum local et minimum global d'une fonction de deux variables)

1) On note :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^{-\left((x-1)^2+(y-3)^2\right)} + 2e^{-\left((x-3)^2+(y-1)^2\right)} \end{array}$$

Compléter les phrases suivantes en utilisant les expressions « un », « le », « minimum », « maximum », « local », « global », « $(1,3)$ » et « $(3,1)$ » et en s'aidant de la représentation graphique de f ci-contre :

- f atteint son .... en ....
- $f(1,3) = 1 + 2e^{-8}$ est .... de f mais ce n'est pas .... de f.
- $f(3,1) = e^{-8} + 2$ est aussi .... de f.
- $f(3,1) = e^{-8} + 2$ est même .... de f.
- f n'admet pas de ....
- f atteint .... en $(1,3)$.



Remarques (signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$)
Soit $(x_0, y_0) \in U$ et supposons f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

- $f(x_0,y_0)$ est un maximum local si $f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0$ au voisinage de (x_0,y_0).
- Et l'approximation affine de f se réécrit $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx p(x-x_0) + q(y-y_0)$.
- Il découle que si $p \neq 0$ ou $q \neq 0$, alors $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ change de signe et alors $f(x_0,y_0)$ n'est pas un maximum local.
- Un raisonnement similaire en remplaçant « $\leq$ » par « $\geq$ » montre que si $p \neq 0$ ou $q \neq 0$, alors $f(x_0,y_0)$ ne peut pas être un minimum local non plus.
- En définitive, pour que f admette en (x_0,y_0) un extremum, il faut que $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et que $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Lorsque ses conditions sont vérifiées ($p = q = 0$), on dit que **(x_0, y_0) est un point critique de f**.

Définition (point critique d'une fontion de deux variables) **À savoir par cœur**
Soit $(x_0, y_0) \in U$ et supposons f de classe $\mathscr{C}^1$.
On dit que $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ **est un point critique de $\boldsymbol{f}$** lorsque :

$$\begin{cases} p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Propriété (condition nécessaire pour qu'une fonction de deux variables et de classe $\mathscr{C}^1$ atteigne un extremum en un point) **À savoir par cœur**

Soit $(x_0, y_0) \in U$ et supposons f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Si f atteint un extremum en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

⚠ La condition nécessaire dans la propriété précédente **n'est pas une condition suffisante**.
Autrement dit, $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ **peut être un point critique de $\boldsymbol{f}$ sans que $\boldsymbol{f}$ atteigne un extremum en $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$**.

Remarque (écriture intéressante de l'approximation polynomiale de degré 2 d'une fonction de deux variables et de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinnage d'un point critique)
Soit $(x_0, y_0) \in U$. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et que (x_0, y_0) est un point critique de f.
En notant $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, l'approximation polynomiale de degré 2 s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
f(x,y) - \overbrace{f(x_0,y_0)}^{\text{partie constante}} &\approx \overbrace{p\,.\,\mathbf{h} + q\,.\,\mathbf{k}}^{\text{partie linéaire}} + \overbrace{\frac{r}{2}\,.\,\boldsymbol{h^2} + s\,.\,\boldsymbol{hk} + \frac{t}{2}\,.\,\boldsymbol{k^2}}^{\text{partie quadratique}} \\
&\approx 0\,.\,\mathbf{h} + 0\,.\,\mathbf{k} + \frac{r}{2}\,.\,\boldsymbol{h^2} + s\,.\,\boldsymbol{hk} + \frac{t}{2}\,.\,\boldsymbol{k^2} \qquad \text{(car } (x_0,y_0) \text{ est un point critique de } f\text{)} \\
&\approx \frac{r}{2}\,.\,\boldsymbol{h^2} + s\,.\,\boldsymbol{hk} + \frac{t}{2}\,.\,\boldsymbol{k^2} \\
&\approx \boldsymbol{k^2}\,.\left(\frac{r}{2}\,.\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{k}}\right)^2 + s\,.\,\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{k}} + \frac{t}{2}\right) \qquad \text{(en factorisant par } \boldsymbol{k^2}\text{)} \\
&\approx \boldsymbol{k^2}\,.\,P\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{k}}\right) \qquad \text{(avec } P \text{ la fonction polynomiale d'une seule variable } P(u) = \frac{r}{2}u^2 + su + \frac{t}{2}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\text{signe de } f(x,y) - f(x_0,y_0) \quad = \quad \text{signe de } P\left(\frac{h}{k}\right)$$

Ainsi, **quand on connaît $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{t}$, on peut déterminer** avec les deux points suivants **si $\boldsymbol{f(x_0, y_0)}$ est un maximum local, si $\boldsymbol{f(x_0, y_0)}$ est un minimum local ou si $\boldsymbol{f}$ n'atteint pas d'extremum local en $\boldsymbol{f(x_0, y_0)}$** :

$$\begin{cases} \text{signe du coefficient dominant de } P = \text{signe de } r \\ \text{signe du discriminant de } P = \text{signe de } s^2 - rt \end{cases}$$

Théorème (condition suffisante pour qu'une fonction de deux variables et de classe $\mathscr{C}^2$ admette un extremum en un point ou pour qu'elle n'en admette pas) **À savoir par cœur**

Soit $(x_0, y_0) \in U$. Supposons f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et que (x_0, y_0) est un point critique de f.
On utilise les notations de Monge r, s et t relativement à f et au point (x_0, y_0).

- Si $s^2 - rt > 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0).
  On dit alors que (x_0, y_0) est **un point col** ou **un point selle** de f.
- Si $s^2 - rt < 0$ et si $r > 0$, alors $f(x_0, y_0)$ est un minimum local de f.
- Si $s^2 - rt < 0$ et si $r < 0$, alors $f(x_0, y_0)$ est un maximum local de f.

2) Déterminer dans chacun des cas suivant les extrema locaux de f et leur nature (maximum ou minimum) :
   a) $f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2\right)$
   b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
   c) $f(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$
   d) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$
3) On note $f(x,y,z)$ l'aire de la surface d'une boîte parallélépipèdique de volume 1 dm^3 et de dimension x, y et z. Démontrer que cette aire est localement minimale pour la boîte cubique.

7 Dérivées partielles d'une composée, changement de variable et application à la résolution d'équations aux dérivées partielles

7.1 Règle de la chaîne et changement de variables

Règle de la chaîne **À savoir par cœur**

- Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U. Alors :

$$\forall\ t \in I,\ \big(f \circ \gamma\big)'(t) = \vec{\nabla} f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \gamma'(t) = x'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)$$

- Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $(x, y) : (u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v)\big)$ une fonction de deux variables, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\Big(f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\Big) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v), y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\\ \frac{\partial}{\partial v}\Big(f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\Big) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v), y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\end{aligned}$$

Règle de la chaîne avec davantage d'abus de langage
On comprend mieux la terminologie « Règle de la chaîne » avec davantage d'abus de langage qui sont d'ailleurs couramment utilisés quand on a bien compris le sens de ces formules :

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Remarque-définition-exemple (une fonction de deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est un changement de variables)

- Quand on considère **rigoureusement** une fonction de deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cccc}(x, y) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\end{pmatrix}\end{array}$$

⚠ Ici, on n'a pas de notation pour cette fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; on n'a seulement noté ses fonctions composantes x et y ; « x » et « y » désignent donc ici des fonctions et non des nombres.

on peut la penser **heuristiquement** comme un changement de variables

$$\begin{cases} x = x(u, v)\\ y = y(u, v)\end{cases}$$

- C'est pourquoi une fonction de deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ s'appelle parfois un **changement de variables**.
- Par exemple, quand on considère la fonction de deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\begin{array}{cccc}(x, y) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}uv\\u^2+v^2\end{pmatrix}\end{array}$$

il s'agit du changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = uv\\ y = u^2 + v^2\end{cases}$$

Exemple (Règle de la chaîne sans abus de langage)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- *(Composition à droite avec une fonction d'une seule variable)*
  On note :

$$\begin{array}{rccl} \gamma = (x, y) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2t \\ t^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

⚠ Ici, on a noté « x » et « y » les fonctions composantes de la courbe paramétrée γ ; x et y sont ici des fonctions d'une seule variable.

  Via la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(f\left(\gamma(t)\right)\right) &= \frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(f\left(2+2t, t^2\right)\right) \\ &= \frac{d(2+2t)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(2+2t, t^2\right) + \frac{d\left(t^2\right)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(2+2t, t^2\right) \\ &= 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(2+2t, t^2\right) + 2t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(2+2t, t^2\right) \end{aligned}$$

- *(Composition à droite avec une fonction de deux variables)*
  On note :

$$\begin{array}{rccl} g = (x, y) : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & g(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

⚠ Ici, on a noté « x » et « y » les fonctions composantes du changement de variables g ; x et y sont ici des fonctions de deux variables.

  Via la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(f\left(g(u, v)\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(f\left(x(u, v), y(u, v)\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(f\left(uv, u^2 + v^2\right)\right) \\ &= \frac{\partial(uv)}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2 + v^2\right) + \frac{\partial\left(u^2 + v^2\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2 + v^2\right) \\ &= v \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2 + v^2\right) + 2u \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2 + v^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(f\left(g(u, v)\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(f\left(x(u, v), y(u, v)\right)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\left(f\left(uv, u^2 + v^2\right)\right) \\ &= \frac{\partial(uv)}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2 + v^2\right) + \frac{\partial\left(u^2 + v^2\right)}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2 + v^2\right) \\ &= u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\left(uv, u^2 + v^2\right) + 2v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(uv, u^2 + v^2\right) \end{aligned}$$

Exemple (Règle de la chaîne avec les abus de langage courants pour une composition avec une fonction d'une seule variable)
Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que x et y sont les coordonnées d'un point matériel à un instant t :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Via la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{d(2+2t)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\left(t^2\right)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

⚠ Ne jamais oublier le sens derrière ces abus de langage qui permettent une telle simplification des écritures.
Par exemple, avec $f(x, y) = x^2 + 5y$, on a :

$$\begin{aligned} x &= 2+2t \\ y &= t^2 \\ f &= x^2 + 5y \\ \frac{df}{dt} &= 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= 2 \cdot \frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial x} + 2t \cdot \frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial y} \\ &= 2 \cdot 2x + 2t \cdot 5 \\ &= 4x + 10t \\ &= 2 \cdot 2x + 2t \cdot 5 \\ &= 4(2+2t) + 10t \\ &= 8 + 18t \end{aligned}$$

Exemple (Règle de la chaîne avec les abus de langage courants pour une composition avec une fonction de deux variables)
Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$.
On note le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u^2+v^2 \end{cases}$$

Via la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= \frac{\partial(uv)}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\left(u^2+v^2\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= v\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+2u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= \frac{\partial(uv)}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial\left(u^2+v^2\right)}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= u\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

⚠ Ne jamais oublier le sens derrière ces abus de langage qui permettent une telle simplification des écritures.
Par exemple, avec $f(x,y)=x^2+5y$, on a :

$$\begin{aligned}
x &= uv\\
y &= u^2+v^2\\
f &= x^2+5y\\
\frac{\partial f}{\partial u} &= v\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+2u\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= v\cdot\frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial x}+2u\cdot\frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial y}\\
&= v\cdot 2x+2u\cdot 5\\
&= v\cdot 2uv+2u\cdot 5\\
&= 2uv^2+10u\\
\frac{\partial f}{\partial v} &= u\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= u\cdot\frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial\left(x^2+5y\right)}{\partial y}\\
&= u\cdot 2x+2v\cdot 5\\
&= u\cdot 2uv+2v\cdot 5\\
&= 2u^2v+10v
\end{aligned}$$

1) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{2x}{y-1} \qquad\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-x^2}{(y-1)^2}$$

On note :

$$g(u,v)=f(2u-v,u-2v) \qquad\qquad h(t)=f\left(t+1,t^2\right)$$

a) Calculer $h'(t)$.
b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ de g.

2) Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$.
On note : $f(x,y)=g\left(x^2-y^2,2xy\right)$
Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ de g.

7.2 Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles

7.2.1 Se ramener à une équation plus simple avec un changement de variable et la règle de la chaîne

Méthode (faire un changement de variable et utiliser la règle de la chaîne pour résoudre une équation aux dérivées partielles)
Pour résoudre une équation aux dérivées partielles d'inconnue $f(x,y)$, on peut parfois utiliser un changement de variables

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Pour ce faire :

- On note :

$$f(x,y) = g(u,v)$$

⚠ Derrière cet abus de langage « se cache » le vrai sens de cette écriture « $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$ » ; « u » et « v » désignent ici des fonctions de deux variables notées ici « x » et « y ».
Les rôles des notations « (x,y) » et « (u,v) » sont donc inversés par rapport à la section précédente.

- On exprime comme dans l'exercice précédent les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ de g.
⚠ Si l'équation est d'ordre 2, on calcule aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, les dérivées partielles de f d'ordre 2, en appliquant la règle de la chaîne aux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- Dans l'équation, on remplace les dérivées partielles de f avec les expressions calculées en fonctions des dérivées partielles de g afin d'obtenir une équation plus simple que l'on sait résoudre.

Exemple (faire un changement de variable et utiliser la règle de la chaîne pour résoudre une équation aux dérivées partielles)
On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

via le changement de variable

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Pour ce faire :

- On note :

$$f(x,y) = g(u,v)$$

Il faut donc d'abord inverser ce changement de variable :

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

Autrement dit :

$$f(x,y) = g(x-y, x+y)$$

- Via la règle de la chaîne, on exprime $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = (-1) \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 1 \cdot \frac{\partial g}{\partial v}$$

- L'équation est donc équivalente à la suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) - \left(-\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) &= 1 \\
\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} &= \frac{1}{2} \\
g(u,v) &= \frac{u}{2} + C(v) \qquad \text{(avec } C \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ d'une seule variable)} \\
f(x,y) &= \frac{x-y}{2} + C(x+y) \qquad \text{(avec } C \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ d'une seule variable)}
\end{aligned}$$

1) À l'aide du changement de variables $u = x,\ v = 3x + y$, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - 3\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

2) À l'aide du changement de variables $u = x + y,\ v = x + 2y$, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

3) À l'aide du changement de variables polaire, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$:

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

4) On note : $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$
Déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \Omega,\ x\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

<u>Indication :</u> Utiliser le changement de variables $(x,y) : (u,v) \mapsto (ue^{v}, e^{-v})$

Remarque (utiliser la règle de la chaîne avec une dérivée partielle d'ordre 2)
Si $f(x,y)$ et les changements de variables inverses l'un de l'autre $(u(x,y), v(x,y))$ et $(v(u,v), y(u,v))$ sont de classe $\mathscr{C}^2$, en notant $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$, on peut exprimer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en fonctions des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de g.
Par exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}\\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial x} \qquad (\triangle\!\!\!! \text{ on choisit un abus de langage où on ne remplace pas } f \text{ par } g)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

Si, de plus, le changement de variable est affine, on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ et donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

5) À l'aide du changement de variables $u = x + y,\ v = x - y$, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

6) À l'aide du changement de variables $x = u,\ y = uv$, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

7.2.2 Application à la résolution de l'équation des cordes vibrantes

Une corde s'étend le long de l'axe des abscisses quand elle est au repos. On note $f(x,t)$ l'ordonnée du point de cette corde à l'instant t. Ainsi, si la corde restait au repos, elle resterait le long de l'axe des abscisses et alors on aurait $f(x,t)=0$. On décide de la déformer en tirant dans la direction de l'axe des ordonnées et de la lâcher. Cette corde se met alors à vibrer et, en notant c la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde, le cours de physique permet de montrer que f est une solution de l'équation des cordes vibrantes suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0}$$

Équation des cordes vibrantes

1) On cherche un changement de variables linéaire

$$\begin{cases} u=ax+bt \\ v=dx+et \end{cases}$$

qui permet de résoudre comme dans la section précédente cette équation.
On note :

$$f(x,t)=g(u(x,t),v(x,t))$$

Afin de faciliter l'écriture des applications successives de la règle de la chaîne (pour calculer des dérivées partielles d'ordre 2), on fait l'abus de notation suivant :

$$(u(x,t),v(x,t))=(u,v)$$

<u>Commentaire :</u> On écrit donc « $f(x,y)=g(u,v)$ »; on utilise la même notation pour les variables de g et les fonctions composantes du changement de variables.
Par exemple, « $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t)$ » désigne en fait « $\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t))$ » et c'est ainsi que la règle de la chaîne peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

a) Démontrer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

<u>Commentaire :</u> Sans abus de notation, cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=a\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+d\cdot\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$$

b) Démontrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2ad\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+d^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

<u>Commentaire :</u> Sans abus de notation, cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=a^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u(x,y),v(x,y))+2ad\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u(x,y),v(x,y))+d^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u(x,y),v(x,y))$$

c) Démontrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=b^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2be\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+e^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

d) En déduire des valeurs de a, b, d et e pour lesquelles on se ramène à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$$

e) Achever la résolution de l'équation des cordes vibrantes.

8 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables et application à la résolution de l'équation des ondes

8.1 Généralisation aux fonctions de plus de deux variables

Les notions qui ont été définies dans les sections précédentes pour les fonctions de deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$ (à une ou deux fonctions composantes) se généralisent de façon similaire pour les fonctions à un nombre quelconque de variables et à un nombre quelconque de fonctions composantes.
En voici un aperçu très rapide (On retrouve évidemment les notions précédentes quand on remplace n par 2.) :

deux points de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}$$

vecteur translatant A sur M

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}}$$

distance euclidienne entre A et M ou norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$

$$\boxed{d\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$$

boule ouverte

$$\boxed{B\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, r\right) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid d\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) < r\right\}}$$

définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \iff \forall\, M \in U,\ \exists\, r > 0 \mid B(M, r) \subset U}$$

limite finie d'une fonction de n variables en un point de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(a_1,\cdots,a_n)} f(x_1, \cdots, x_n)}$$

Les notions précédentes permettent de définir de la même façon que pour les fonctions de deux variables la notion suivante :

- continuité d'une fonction de n variables en un point de $\mathbb{R}^n$ et sur son domaine de définition

fonction partielle d'une fonction de n variables en un point de $\mathbb{R}^n$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ variable

$$\boxed{f_{a_1,\cdots,a_{j-1},\bullet,a_{j+1},\cdots,a_n} : x \mapsto f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n)}$$

dérivée partielle d'une fonction de n variables en un point de $\mathbb{R}^n$ par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ variable

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n) = f'_{a_1,\cdots,a_{j-1},\bullet,a_{j+1},\cdots,a_n}(a_j) = \lim_{x\to a_j} \frac{f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_n) - f\left(a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n\right)}{x - a_j}}$$

gradient d'une fonction de n variables en un point

$$\boxed{\vec{\nabla} f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}}$$

formule de Taylor à l'ordre 1

$$\boxed{f(M) = f(A) + \overrightarrow{\nabla} f(A) \cdot \overrightarrow{AM} + \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \cdot \mathscr{E}(M) \qquad \text{avec } \lim_{M \to A} \mathscr{E}(M) = 0}$$

approximation affine en un point

$$\boxed{f(M) \approx f(A) + \overrightarrow{\nabla} f(A) \cdot \overrightarrow{AM}}$$

fonction dérivée partielle d'ordre 1 d'une fonction de n variables par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ variable

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : & U & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M) \end{array}}$$

fonction dérivée partielle d'ordre 2 d'une fonction de n variables en un point

$$\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}$$

Les notions précédentes permettent de définir de la même façon que pour les fonctions de deux variables les notions suivantes :

- les classes de fonctions $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur U.

théorème de Schwarz

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U, \text{ alors } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}}$$

fonction g à n variables et à valeur dans $\mathbb{R}^p$ - fonctions composantes $g_1,...,g_p$

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g : & U & \to & \mathbb{R}^p \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} g_1(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ g_p(x_1,...,x_n) \end{pmatrix} \end{array}}$$

régularité des fractions rationnelles à n variables

$$\boxed{\text{« Les fractions rationnelles à } n \text{ variables sont de classe } \mathscr{C}^2\text{. »}}$$

stabilité de la classe $\mathscr{C}^k$ par opération

« Soit $k \in \{0, 1, 2\}$.
Une somme, une différence, un produit, un quotient ou une composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (à un nombre quelconque de variables et à un nombre quelconque de fonctions composantes) est de classe $\mathscr{C}^k$ sur son ensemble de définition. »

matrice jacobienne au point A d'une fonction à n variables, à valeur dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$

$$\boxed{J(f)(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}}$$

matrice hessienne au point A d'une fonction à n variables, à valeur dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$

$$\boxed{H(f)(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(A) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(A) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(A) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(A) \end{pmatrix}}$$

formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$\boxed{f(M) = f(A) + J(f)(A)\cdot\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AM}^T\cdot H(f)(A)\cdot\overrightarrow{AM} + \left|\left|\overrightarrow{AM}\right|\right|^2\cdot\mathscr{E}(M) \text{ avec } \lim_{M\to A}\mathscr{E}(M) = 0}$$

règle de la chaîne

Si $\phi(u_1,...,u_p) = (x_1(u_1,...,u_p),...,x_n(u_1,...,u_p))$ fonction $\mathscr{C}^1$, à p variables notées $u_1,...,u_p$ et à n fonctions composantes notées $x_1,...,x_p$ et si $f(x_1,...,x_n)$ fonction $\mathscr{C}^1$, à n variables notées aussi $x_1,...,x_p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall j\in[[1;p]],\ \frac{\partial(f\circ\phi)}{\partial u_j}(u_1,...,u_p) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1,...,u_p)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(u_1,...,u_p))$$

⚠Les notations $x_1,...,x_p$ désignent à la fois les variables de f et les fonctions composantes de ϕ.

règle de la chaîne avec abus de notation

Avec le changement de variables

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1,...,u_p) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1,...,u_p)\end{cases}$$

et en notant

$$f(x_1,...,x_n) = f(u_1,...,u_p)$$

alors on a

$$\forall j\in[[1;p]],\ \frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

fonctions dérivées partielles d'ordre 1 et 2 d'une fonction à n variables et p composantes

Si $\phi(x_1,...,x_n) = (\phi_1(x_1,...,x_n),...,\phi_p(x_1,...,x_n))$ fonction $\mathscr{C}^2$ à n variables et p composantes, on définit

$$\forall (i,j)\in[[1;n]]^2,\ \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_j}(a_1,...,a_n) = \begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_j}(a_1,...,a_n)\\ \vdots \\ \frac{\partial\phi_p}{\partial x_j}(a_1,...,a_n)\end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}(a_1,...,a_n) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x_i\partial x_j}(a_1,...,a_n)\\ \vdots \\ \frac{\partial^2\phi_p}{\partial x_i\partial x_j}(a_1,...,a_n)\end{pmatrix}\end{cases}$$

un exemple d'équation aux dérivées partielles dont l'inconnue $\overrightarrow{E}$ est une fonction à 4 variables et 3 fonctions composantes (« un champ de vecteurs dépendant du temps »)

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}(x,y,z,t)}$$

deux écritures moins compactes de l'équation aux dérivées partielles précédente

$$\boxed{\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial y^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2}(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}(x,y,z,t)}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}(x,y,z,t)\\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}(x,y,z,t)\\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(x,y,z,t)\end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}(x,y,z,t)\\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}(x,y,z,t)\\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}(x,y,z,t)\end{pmatrix}}$$

8.2 Application à la résolution de l'équation des ondes

L'équation aux dérivées partielles considérée à la fin de la section précédente est appelée l'équation de propagation des ondes :

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}}$$

Équation des ondes

L'équation des cordes vibrantes résolue précédemment en est la version champ scalaire à une seule variable spatiale. La constante c représente encore la vitesse de propagation de l'onde.

1) Résoudre l'équation des ondes en utilisant le changement de variables sphérique et la résolution de l'équation des cordes vibrantes.