CORRECTION DES EXERCICES SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes (section 7.2.2 du cours)

1.1 Énoncé

Une corde s'étend le long de l'axe des abscisses quand elle est au repos. On note $f(x,t)$ l'ordonnée du point de cette corde à l'instant t. Ainsi, si la corde restait au repos, elle resterait le long de l'axe des abscisses et alors on aurait $f(x,t)=0$. On décide de la déformer en tirant dans la direction de l'axe des ordonnées et de la lâcher. Cette corde se met alors à vibrer et, en notant c la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde, le cours de physique permet de montrer que f est une solution de l'équation des cordes vibrantes suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

Équation des cordes vibrantes

1) On cherche un changement de variables linéaire

$$\begin{cases} u = ax + bt \\ v = dx + et \end{cases}$$

qui permet de résoudre comme dans la section précédente cette équation.
On note :

$$f(x,t) = g(u(x,t), v(x,t))$$

Afin de faciliter l'écriture des applications successives de la règle de la chaîne (pour calculer des dérivées partielles d'ordre 2), on fait l'abus de notation suivant :

$$(u(x,t), v(x,t)) = (u,v)$$

Commentaire : On écrit donc « $f(x,y) = g(u,v)$ »; on utilise la même notation pour les variables de g et les fonctions composantes du changement de variables.
Par exemple, « $\frac{\partial f}{\partial u}(x,t)$ » désigne en fait « $\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t), v(x,t))$ » et c'est ainsi que la règle de la chaîne peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

a) Démontrer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

Commentaire : Sans abus de notation, cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\left(u(x,y), v(x,y)\right) + d\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

b) Démontrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ad\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + d^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Commentaire : Sans abus de notation, cette relation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = a^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(u(x,y), v(x,y)\right) + 2ad\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(u(x,y), v(x,y)\right) + d^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(u(x,y), v(x,y)\right)$$

c) Démontrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2be\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + e^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

d) En déduire des valeurs de a, b, d et e pour lesquelles on se ramène à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$$

e) Achever la résolution de l'équation des cordes vibrantes.

1.2 Correction

1) a) Avec les abus de notation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} \qquad \text{(via la règle de la chaîne)}\\ &= \frac{\partial(ax+bt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial(dx+et)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\\ &= a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Sans les abus de notation au début du calcul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial\left(g\circ\phi\right)}{\partial x}(x,t)$$

(avec $\phi(x,t)=(u(x,t),v(x,t))$, ie $\phi=(u,v)$ (u et v sont les fonctions composantes du changement de variables ϕ))

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t))+\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\cdot\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,t),v(x,t)) \qquad \text{(via la règle de la chaîne)}\\ &= a\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t))+d\cdot\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,t),v(x,t))\\ &= a\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ\phi\right)(x,t)+d\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ\phi\right)(x,t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\left(a\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ\phi\right)+d\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ\phi\right)\right)(x,t)}$$

$$= a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(x,t)+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(x,t)$$

(via l'abus de notation $\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t))=\frac{\partial f}{\partial u}(x,t)$ (voir le commentaire écrit avant cette question))

$$= \left(a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x,t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$$

b) Avec les abus de notation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= a\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+d\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ &= a\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial v}\right)+d\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\right) \qquad \text{(via la règle de la chaîne)}\\ &= a\cdot\left(a\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial v}\right)+d\cdot\left(a\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}+d\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\right)\\ &= a\cdot\left(a\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+d\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\right)+d\cdot\left(a\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+d\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) \qquad \text{(par définition des dérivées partielles d'ordre 2)}\\ &= a^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+ad\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+d^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\ &= a^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+ad\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+d^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \qquad \text{(via le théorème de Shwarz)}\\ &= a^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+ad\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)+d^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\ &= a^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2ad\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+d^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\ &= a^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2ad\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+d^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

(voir ce même calcul sans abus de langage pour comprendre cette dernière étape)

Sans abus de notation au début du calcul :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,t)\\ &= \frac{\partial\left(a\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\circ\phi\right)+d\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial v}\circ\phi\right)\right)}{\partial x}(x,t)\end{aligned}$$

(via la relation encadrée dans le calcul de la question précédente commençant sans abus de notation)

$$
\begin{aligned}
&= \left(a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \circ \phi \right)}{\partial x} + d \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \circ \phi \right)}{\partial x} \right)(x,t) \\
&= a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \circ \phi \right)}{\partial x}(x,t) + d \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \circ \phi \right)}{\partial x}(x,t) \\
&= a \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)}{\partial u}\big(\phi(x,t)\big) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)}{\partial v}\big(\phi(x,t)\big) \right) \qquad \text{(via la formule des chaînes pour } \tfrac{\partial g}{\partial u} \circ \phi \\
&\qquad + d \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)}{\partial u}\big(\phi(x,t)\big) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)}{\partial v}\big(\phi(x,t)\big) \right) \qquad \text{et pour } \tfrac{\partial g}{\partial v} \circ \phi) \\
&= a \cdot \left(a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)}{\partial u}\big(\phi(x,t)\big) + d \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)}{\partial v}\big(\phi(x,t)\big) \right) + d \cdot \left(a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)}{\partial u}\big(\phi(x,t)\big) + d \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)}{\partial v}\big(\phi(x,t)\big) \right) \\
&= a \cdot \left(a \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\big(\phi(x,t)\big) + d \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\big(\phi(x,t)\big) \right) + d \cdot \left(a \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\big(\phi(x,t)\big) + d \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\big(\phi(x,t)\big) \right) \\
&= a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\big(\phi(x,t)\big) + 2ad \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\big(\phi(x,t)\big) + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\big(\phi(x,t)\big) \\
&= \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ad \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)\big(\phi(x,t)\big) \\
&= \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ad \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right)(u(x,t), v(x,t))
\end{aligned}
$$

c) Les deux questions précédentes en faisant jouer le rôle de x, a et d respectivement à t, b et e donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2be \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + e^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

d) En remplaçant les dérivées partielles de f par les expressions calculées précédemment en fonction des dérivées partielles de f, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 &\iff \left(a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ad \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \left(b^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2be \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + e^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) = 0 \\
&\iff \left(a^2 - \frac{b^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(2ad - \frac{2be}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \left(d^2 - \frac{e^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0
\end{aligned}
$$

On cherche donc a, b, d et e tels que $a = \pm \frac{b}{c}$ et $d = \pm \frac{e}{c}$ pour qu'il ne reste que le terme en $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.
On choisit par exemple :

$$\begin{cases} a = d = 1 \\ b = c \\ e = -c \end{cases}$$

On utilise donc le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

Remarque : On ne peut pas choisir $a = d = 1$ et $b = e = c$ car le changement de variables correspondant $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x + ct \end{cases}$ n'est pas inversible.

Avec le changement de variable $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 &\iff \left(a^2 - \frac{b^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(2ad - \frac{2be}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \left(d^2 - \frac{e^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \\
&\iff 0 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(2 \times 1 \times 1 - \frac{2 \times c \times (-c)}{c^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 0 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \\
&\iff 4 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \\
&\iff \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0
\end{aligned}
$$

e) On intègre par rapport à u puis par rapport à v :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 &\iff \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \\
&\iff \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right) = 0 \\
&\iff \text{Pour chaque réel } v\text{, la fonction } u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \text{ est une fonction constante.} \\
&\iff \text{Pour chaque réel } v\text{, il existe un nombre que l'on peut noter } C(v) \\
&\qquad \text{(puisqu'il ne dépend que de } v\text{) tel que : } \forall u \in \mathbb{R},\ \tfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) = C(v) \\
&\iff \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = C(v) \qquad \text{(avec } C \text{ une fonction d'une seule variable et de classe } \mathscr{C}^1\text{)} \\
&\iff \text{Pour chaque réel } u\text{, la fonction } v \mapsto g(u, v) \text{ est une fonction constante.} \\
&\iff \text{Pour chaque réel } u\text{, il existe un nombre que l'on peut noter } D(u) \\
&\qquad \text{(puisqu'il ne dépend que de } u\text{) tel que } \forall v \in \mathbb{R},\ g(u, v) = F(v) + D(u) \\
&\qquad \text{où } F \text{ est une primitive de la fonction } C. \\
&\iff g(u, v) = C_1(u) + C_2(v) \quad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux fonctions d'une seule variable et de classe } \mathscr{C}^2\text{)} \\
&\iff g(u(x, t), v(x, t)) = C_1(u(x, t)) + C_2(v(x, t)) \quad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ de classe } \mathscr{C}^2\text{)} \\
&\iff f(x, t) = C_1(x + ct) + C_2(x - ct) \quad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ de classe } \mathscr{C}^2\text{)}
\end{aligned}$$

En définitive, les solutions de l'équation des cordes vibrantes sont les fonctions de la forme suivante :

$$\boxed{f(x, t) = C_1(x + ct) + C_2(x - ct) \qquad \text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux fonctions d'une seule variable et de classe } \mathscr{C}^2}$$