

EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES

S. Labopin

Table des matières

1	Intégrales doubles	2
1.1	Intégrale double en tant que volume sous une surface d'équation $z = f(x, y)$	2
1.1.1	Contexte d'intégration sur des régions de type I ou II	2
1.1.2	Quand f est définie sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$	3
1.1.3	Quand f est définie sur une région de type I ou une région de type II - Découpage par piles ou par tranches	5
1.2	Intégrale double en tant qu'aire d'une région plane	7
1.2.1	Approximation de l'aire d'une région de type I par une somme d'aires de rectangles	7
1.2.2	Lien entre aire d'une région D et volume sous la représentation graphique de $f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1$	9
1.3	Intégrale double en tant que quantité totale d'un élément distribué dans une région plane suivant une densité surfacique f	9
1.3.1	Application en physique	10
1.3.1.1	Calculer la masse d'un objet plat	10
1.3.1.2	Déterminer le centre d'inertie d'un objet plat	10
1.3.1.3	Application en économie	10
1.4	Changement de variables dans une intégrale double	10
1.4.1	Changement de variables affine	11
1.4.2	Changement de variables polaires	12
1.5	Formule de Green-Riemann	12
1.5.1	Pour les étudiants qui sont très à l'aise et qui veulent faire le lien avec le rotationnel d'un champ de vecteurs et sa circulation le long du bord d'une région de type I	12
1.5.2	Pour les étudiants qui souhaite étudier la formule de Green-Riemann directement, en reportant éventuellement à plus tard son interprétation en terme de rotationnel d'un champ de vecteurs et de sa circulation le long du bord d'une région de type I	12
1.5.3	Calculer la circulation d'un champ de vecteurs le long du bord d'une région de type I ou l'intégrale double d'un champ scalaire sur une région de type I via la formule de Green-Riemann	13
2	Intégrales triples	14
2.1	Découper en tranches pour pouvoir réaliser trois intégrations successives	14
2.2	Définitions	14
2.2.1	Intégrale d'une fonction de trois variables sur une région de l'espace tridimensionnel	14
2.2.2	Volume d'une région de l'espace tridimensionnel	14
2.3	Méthodes de calcul et applications	15
2.3.1	Calculer un volume avec une intégrale triple	15
2.3.2	Utiliser les propriétés de linéarité et de séparation des variables	15
2.3.3	Applications en physique	15
2.3.3.1	Calculer la quantité totale et la quantité moyenne d'un matériau	15
2.3.3.2	Déterminer un centre de gravité	16
2.4	Changement de variables dans une intégrale triple	16
2.4.1	Changement de variables affine	17
2.4.2	Changement de variables cylindrique	17
2.4.3	Changement de variables sphérique	17
3	Quelques prolongements théoriques hors programme « pour aller plus loin »	19
3.1	Applications en géométrie différentielles	19
3.1.1	Calculer la longueur d'une courbe non droite	19
3.1.2	Calculer l'aire d'une surface non plane	19
3.2	Applications en physique (en cours de rédaction)	19
3.2.1	Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface (en cours de rédaction)	19
3.2.2	Théorème de la divergence (ou formule de Green-Ostrogradski) (en cours de rédaction)	19
3.2.3	Formule de Stokes (en cours de rédaction)	19

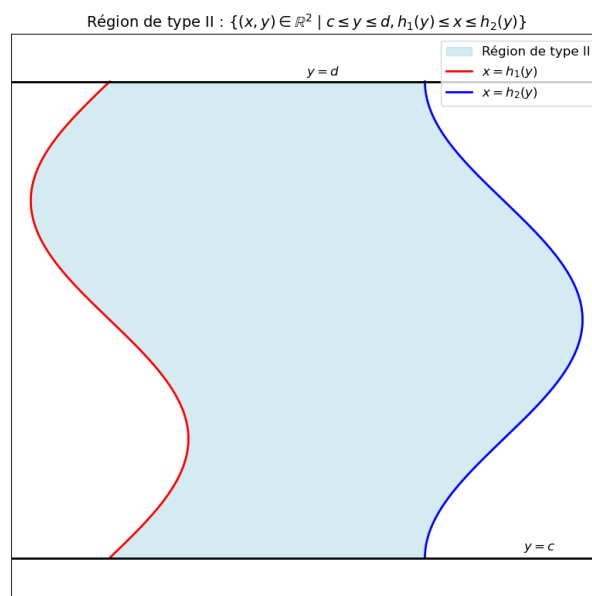
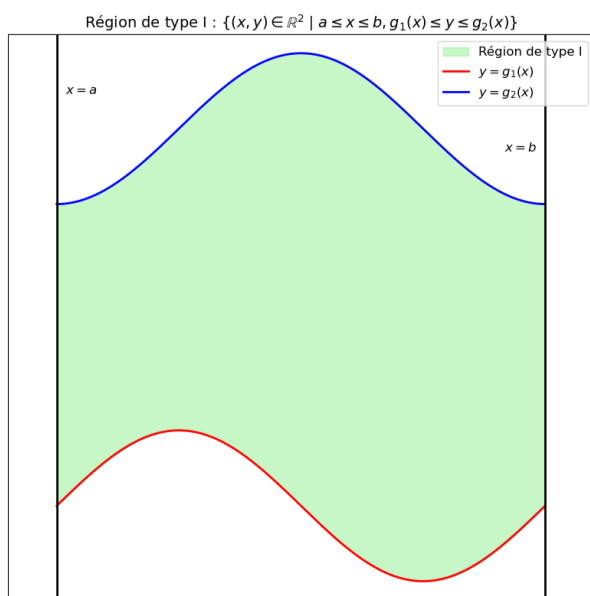
1 Intégrales doubles

1.1 Intégrale double en tant que volume sous une surface d'équation $z = f(x, y)$

1.1.1 Contexte d'intégration sur des régions de type I ou II

Dans toute la section « Intégrales doubles » :

- a, b, c et d sont des réels tels que $a < b$ et $c < d$.
- D est une région du plan de l'une des deux formes suivantes que l'on appelle respectivement région de type I et région de type II :
 - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ avec g_1 et g_2 deux fonctions définies, continues et positive sur $[a, b]$
 - ou $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ avec h_1 et h_2 deux fonctions définies et continues sur $[c, d]$
 - ou d'une des formes obtenues en remplaçant un ou plusieurs « \leq » par un « $<$ » dans les formes précédentes.

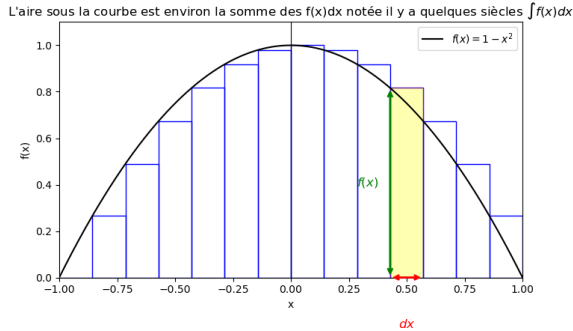


- f est une fonction définie, continue et positive sur D .

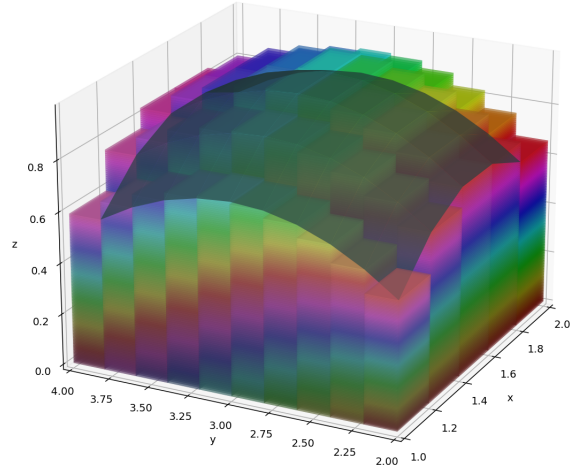
1.1.2 Quand f est définie sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$

Dans cette sous-section, D est le rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Quand f n'était que d'une seule variable, on a approché l'aire sous sa courbe avec une somme d'aires de rectangle de largeur dx infinitésimale :

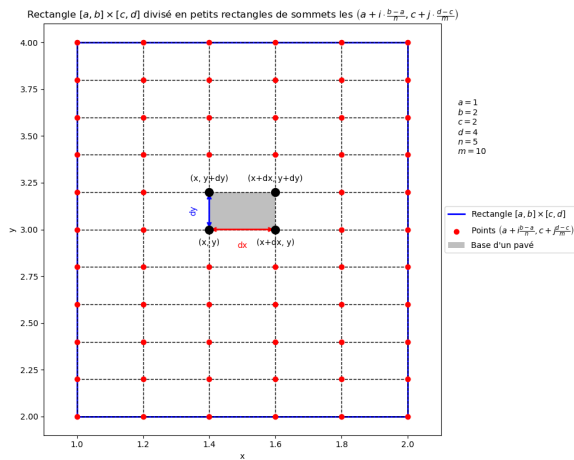
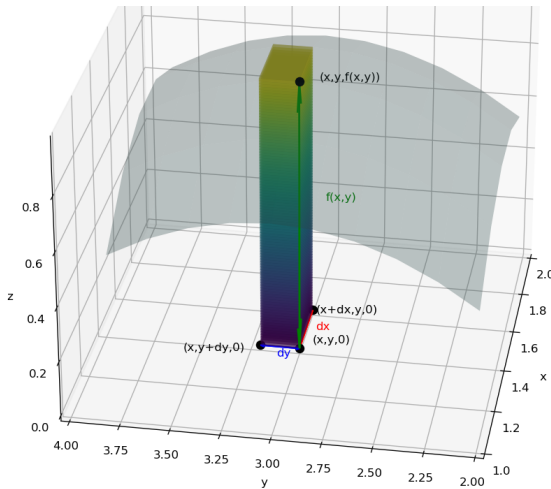


Maintenant que f est de deux variables, on approche le volume sous son graphe avec une somme de volumes de pavé dont les dimensions de leur base dx et dy sont infinitésimales :



Chacun de ces pavés a pour base un rectangle de sommets $(x, y, 0)$, $(x + dx, y, 0)$, $(x, y + dy, 0)$ et $(x + dx, y + dy, 0)$ et de hauteur $f(x, y)$:

Les bases de ces pavés ont pour sommets les points $(a + i \frac{b-a}{n}, c + j \frac{d-c}{m}, 0)$. Il divisent le rectangle sur lequel est définie f en plus petits rectangles de dimensions $dx = \frac{b-a}{n}$ et $dy = \frac{d-c}{m}$:



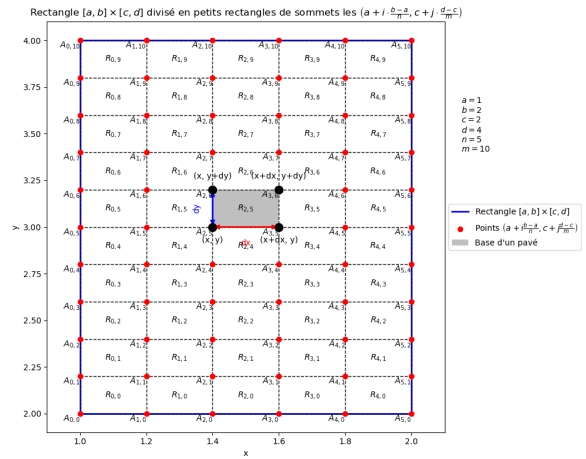
On note :

$$\forall (i, j) \in [[0, n]] \times [[0, m]], A_{i,j} = \left(a + i \frac{(b-a)}{n}, c + j \frac{(d-c)}{m} \right)$$

$$\forall (i, j) \in [[0, n-1]] \times [[0, m-1]],$$

$R_{i,j}$ = rectangle de sommets $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}$ et $A_{i+1,j+1}$

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \text{volume sous la représentation graphique de } f$$



On peut donc estimer le volume sous la représentation graphique de f d'une manière analogue à celle employée pour estimer l'aire sous la courbe d'une fonction d'une seule variable :

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &\approx f(A_{0,0}) \times (\text{aire de } R_{0,0}) + f(A_{0,1}) \times (\text{aire de } R_{0,1}) + \dots + f(A_{0,m-1}) \times (\text{aire de } R_{0,m-1}) \\ &\quad + f(A_{1,0}) \times (\text{aire de } R_{1,0}) + f(A_{1,1}) \times (\text{aire de } R_{1,1}) + \dots + f(A_{1,m-1}) \times (\text{aire de } R_{1,m-1}) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f(A_{n-1,0}) \times (\text{aire de } R_{n-1,0}) + f(A_{n-1,1}) \times (\text{aire de } R_{n-1,1}) + \dots + f(A_{n-1,m-1}) \times (\text{aire de } R_{n-1,m-1}) \\ &\approx \sum_{j=0}^{m-1} f(A_{0,j}) \times \text{aire de } R_{0,j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} f(A_{1,j}) \times \text{aire de } R_{1,j} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} f(A_{n-1,j}) \times \text{aire de } R_{n-1,j} \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(A_{i,j}) \times \text{aire de } R_{i,j} \\ &\approx \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}, c + j \frac{(d-c)}{m}\right)}_{\iint f(x, y)} \times \underbrace{\frac{(b-a)}{n}}_{dx} \times \underbrace{\frac{(d-c)}{m}}_{dy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}, c + j \frac{(d-c)}{m}\right) \times \frac{(b-a)}{n} \times \frac{(d-c)}{m} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{m \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{(d-c)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}, c + j \frac{(d-c)}{m}\right)}_{\int_c^d f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}, y\right) dy} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_c^d f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}, y\right) dy \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (\text{avec le même raisonnement}) \end{aligned}$$

On démontre ainsi le théorème suivant :

Théorème

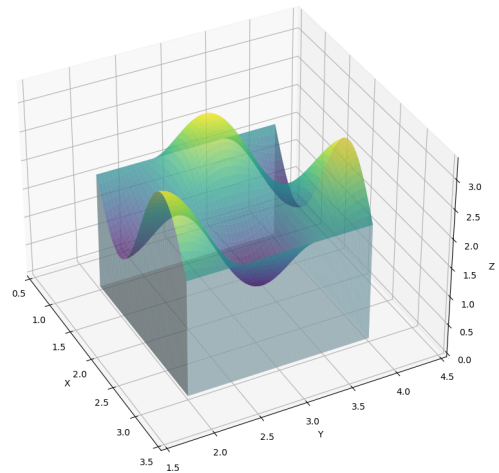
$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

On obtient en particulier le dit théorème de Fubini attestant que l'ordre des deux intégrations n'a pas d'importance. On peut « intégrer d'abord par rapport à x puis par rapport à y » ou bien on peut « intégrer d'abord par rapport à y puis par rapport à x » :

Théorème de Fubini

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Volume délimité par $z=f(x,y)$ et les plans $x=a, x=b, y=c, y=d, z=0$



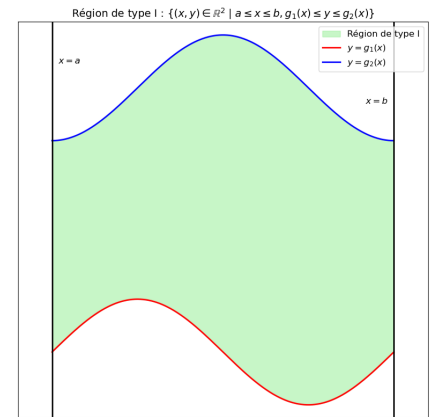
Calculer le volume sous la représentation graphique de f , c'est-à-dire le volume délimité par les plans d'équation $z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$ et la représentation graphique de f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f: [0; 1] \times [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 y + 1$
- 2) $f: [0; \pi] \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto y \cos(xy)$

1.1.3 Quand f est définie sur une région de type I ou une région de type II - Découpage par piles ou par tranches

Dans cette sous-section, D est une région de type I (comme ci-contre), ie :

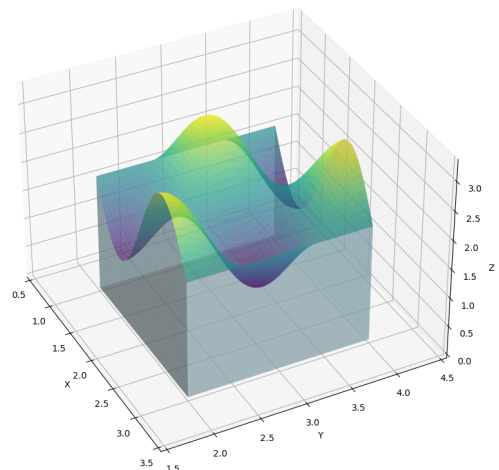
- g_1 et g_2 sont deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ ou d'une forme obtenue en remplaçant un ou plusieurs « \leq » par un « $<$ »



Volume délimité par $z=f(x,y)$ et les plans $x=a, x=b, y=c, y=d, z=0$

Dans ce cas, on note de la façon suivante le volume délimité par les plans d'équation $z = 0, x = a, x = b$, et les surfaces d'équations $y = g_1(x), y = g_2(x), z = f(x, y)$ (cf figure ci-contre) :

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$



L'approximation du volume sous la représentation graphique de f de la section 1.1.2 est plus complexe car la division de D se fait par tranches de dimensions variables quand D n'est plus un rectangle.

Par exemple, dans la figure ci-contre, on a divisé le triangle $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \underbrace{0}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{1-x}_{g_2(x)} \right\}$ en petits rectangles infinitésimaux de dimensions $dx = \frac{1}{10}$ et $dy = \frac{1}{10}$. La tranche de cette région de type I comprise entre les droites d'équations $x = \frac{6}{10}$ et $x = \frac{6}{10} + dx$ est approchée par les petits rectangles rouges dont le sommet inférieur gauche (a, b) (représenté ci-contre avec l'une des croix) est tel que :

$$g_1\left(\frac{6}{10}\right) = g_1(a) \leq b \leq g_2(a) = g_2\left(\frac{6}{10}\right)$$

Le volume représenté ci-contre en rouge sous la représentation graphique de f et au-dessus de cette tranche est donc approché par :

$$\left(\int_{g_1\left(\frac{6}{10}\right)}^{g_2\left(\frac{6}{10}\right)} f\left(\frac{6}{10}, y\right) dy \right) \times dx$$

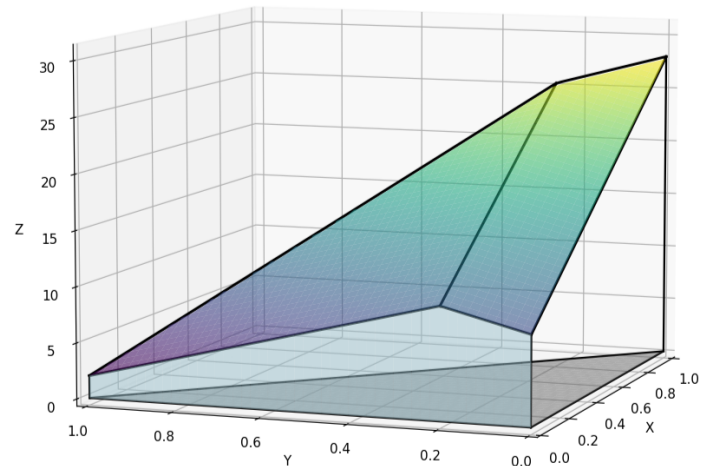
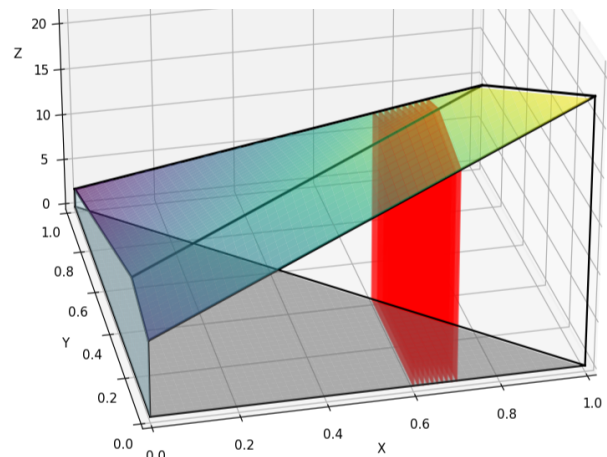
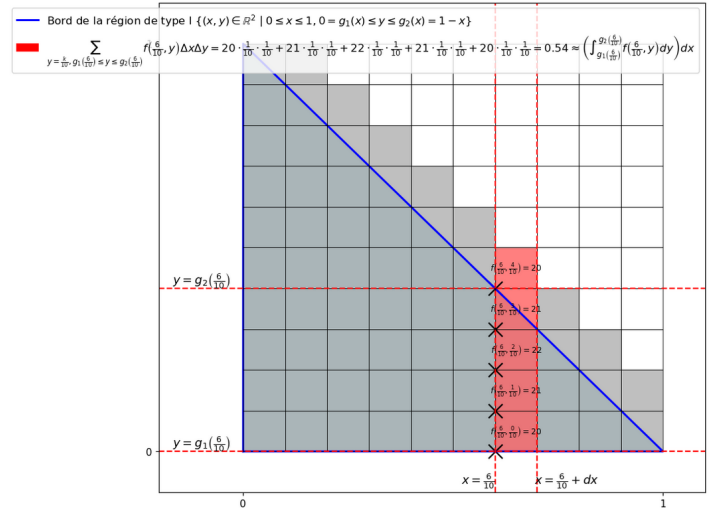
Plus généralement, le volume de la tranche entre x et $x + dx$ s'approche par l'intégrale suivante dont les bornes d'intégration « par rapport à y » dépendent de x :

$$\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) \times dx$$

Il ne reste qu'à intégrer « par rapport à x » pour obtenir le volume délimité par les plans d'équations $z = 0, x = a, x = b$ et les surfaces d'équations $y = g_1(x), y = g_2(x)$ et $z = f(x, y)$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Approximation de la somme pondérée des valeurs d'une fonction sur une tranche de son domaine de définition, une région de type I



Ce solide est délimité par les plans d'équation $z = 0, x = a, x = b$ et les surfaces d'équation $y = g_1(x), y = g_2(x)$ et $z = f(x, y)$ où $a = 0, b = 1, g_1(x) = 0, g_2(x) = 1 - x$ et $f(x, y) = 10(2x + 1 - |y - 0.2|)$.

△ Les surfaces d'équations $y = g_1(x), y = g_2(x)$ et $z = f(x, y)$ sont dans cet exemple composées de parties de plans car les formules pour $g_1(x), g_2(x)$ et $f(x, y)$ ont été choisies affines par morceau afin de construire un premier exemple simple pour illustrer une intégrale double de fonction non définie sur un rectangle.

Ce n'est plus le cas dans la dernière question proposée après le théorème suivant pour retrouver le volume d'une demi-boule.

Théorème

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Remarque : Si D une région de type II, on a un résultat analogue « $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$ ».

Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans chacun des cas suivants :

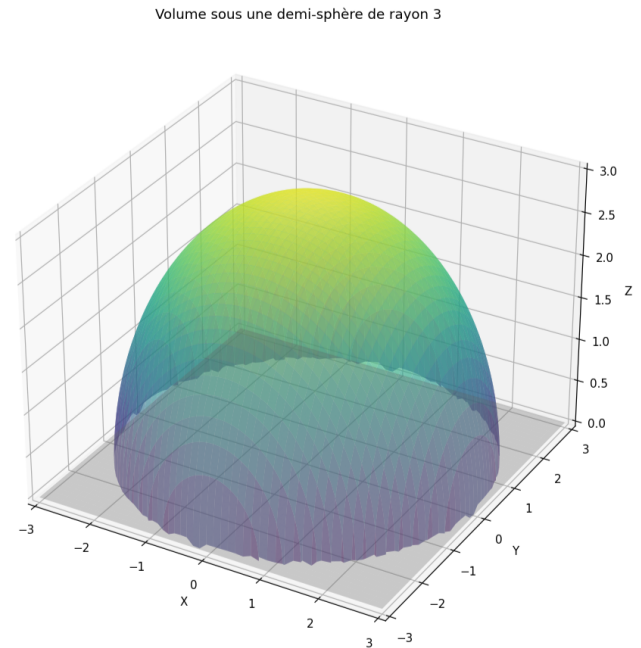
- 1) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = xy(x + y) \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = x \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = x + y \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = \cos(xy) \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = xy \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, y \geq 2, x + y \leq 5\} \\ \forall (x, y) \in D, f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3} \end{cases}$
- 8) Calculer le volume du solide considéré dans le premier exemple simple d'intégrale double de fonction non définie sur un rectangle.
- 9) Retrouver le volume d'une boule de rayon R en choisissant :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

$$f: \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{array}$$

Indication : Utiliser le changement de variable $\cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Commentaire : On verra plus tard comment calculer ce volume plus rapidement en utilisant une version du théorème de changement de variable pour les intégrales doubles et notamment le passage en coordonnées polaires.



1.2 Intégrale double en tant qu'aire d'une région plane

1.2.1 Approximation de l'aire d'une région de type I par une somme d'aires de rectangles

Approximation de l'aire d'une région de type I par une somme d'aires de carrés

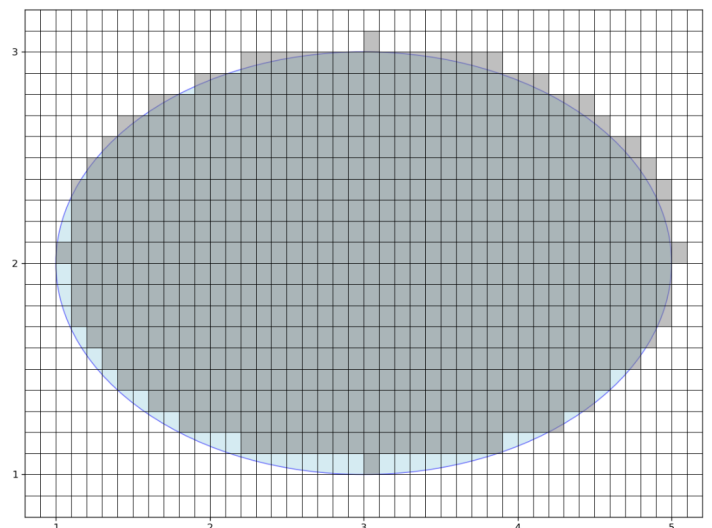
On considère D une région de type I :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Comme g_1 et g_2 sont continues, D est bornée et donc inclus dans un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ que l'on quadrille uniformément suivant n lignes et m colonnes que l'on numérote à partir de 0 et en augmentant respectivement avec l'abscisse et l'ordonnée. On note $(x_{i,j}, y_{i,j})$ l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Comme dans la figure ci-contre, quand on colorie en gris tous les rectangles de ce quadrillage qui ont leur sommet de plus petites coordonnées (« en bas à gauche ») à l'intérieur de la région D , on obtient une approximation de la région D .

On définit l'aire d'une région de type I comme la limite quand n et m tendent vers $+\infty$ (« ie quand les rectangles de ce quadrillage deviennent infiniment petits ») de la somme des aires de ces rectangles.



Tentons de faire le lien avec les intégrales doubles en utilisant le théorème des sommes de Riemann :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Aire recouverte par} \\ \text{les rectangles de} \\ \text{sommet de plus} \\ \text{petites coordonnées} \\ (x_{i,j}, y_{i,j}) \in D \end{array} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{j \in \{0, m-1\} \\ g_1(x_{i,0}) \leq y_{i,j} \leq g_2(x_{i,0})}} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d-c}{m} \sum_{\substack{j \in \{0, m-1\} \\ g_1(x_{i,0}) \leq y_{i,j} \leq g_2(x_{i,0})}} 1$$

Avec une version plus forte du théorème des sommes de Riemann qui dépasse le cadre de ce cours, on peut démontrer que :

$$\frac{d-c}{m} \sum_{\substack{j \in \{0, m-1\} \\ g_1(x_{i,0}) \leq y_{i,j} \leq g_2(x_{i,0})}} 1 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{g_1(x_{i,0})}^{g_2(x_{i,0})} 1 dy$$

Ainsi :

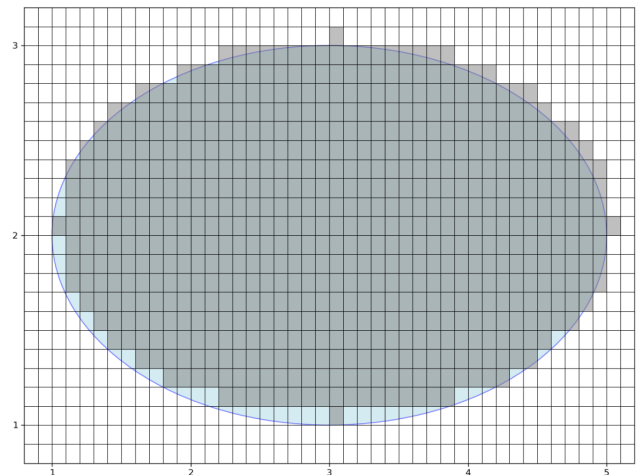
$$\left(\begin{array}{l} \text{Aire recouverte par} \\ \text{les rectangles de} \\ \text{sommet de plus} \\ \text{petites coordonnées} \\ (x_{i,j}, y_{i,j}) \in D \end{array} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{g_1(x_{i,0})}^{g_2(x_{i,0})} 1 dy$$

Et si l'on applique le théorème des sommes de Riemann à la fonction $x \mapsto \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy$, on obtient :

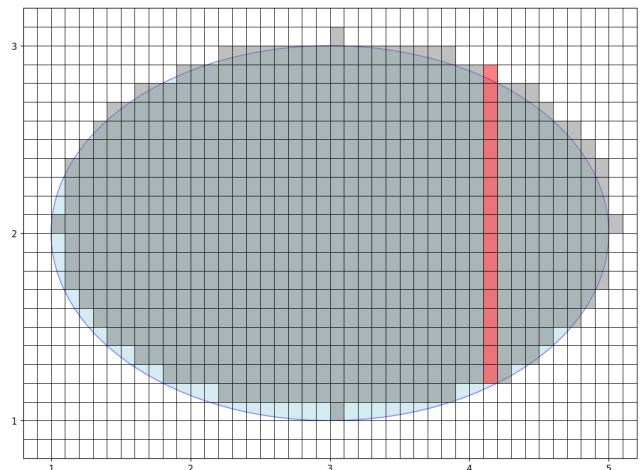
$$\left(\begin{array}{l} \text{Aire recouverte par} \\ \text{les rectangles de} \\ \text{sommet de plus} \\ \text{petites coordonnées} \\ (x_{i,j}, y_{i,j}) \in D \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx$$

$$\text{Aire de la région } D = \iint_D 1 dx dy$$

Approximation de l'aire d'une région de type I par une somme d'aires de carrés



Visualisation de l'approximation de l'aire d'une région de type I par une somme d'aires de carrés, en mettant en évidence la tranche des carrés à $x = 4.1$



On vient ainsi d'établir le théorème suivant :

Théorème

$$\text{aire de la région } D = \iint_D 1 dx dy$$

- 1) Calculer l'aire de la région $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$.
- 2) Écrire l'aire d'un disque de rayon r avec une intégrale double et retrouver que cette aire vaut πr^2 .

1.2.2 Lien entre aire d'une région D et volume sous la représentation graphique de $f : D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1$

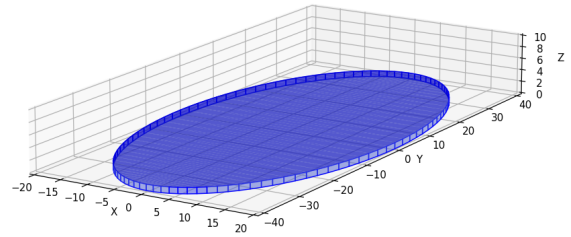
Si f est la fonction constante égale à 1 sur D (ie $\forall (x, y) \in D, f(x, y) = 1$), alors le volume délimité par les plans d'équation $z = 0, x = a, x = b$, et les surfaces d'équations $y = g_1(x), y = g_2(x), z = f(x, y)$ est une plaque de hauteur 1 et de base la région D .

Par exemple, dans la figure ci-contre, ce volume est celui d'une plaque à base elliptique dans le cas où :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, \\ \underbrace{-b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_2(x)} \end{array} \right\}$$

$$f: \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 1 \end{array}$$



Le volume de la région de l'espace délimitée par les surfaces d'équations $z = 0, x = a, x = b, y = g_1(x), y = g_2(x), z = 1$ est égal à l'aire de sa base D .

« Quand on remplit un tel volume avec des unités de volumes, on n'a pas la place de les empiler puisque la hauteur de ce volume est 1. Ces unités de volume sont alors étalées et il y a donc autant d'unités de volume que d'unités d'aire pour recouvrir sa base D . » C'est pourquoi, le volume susmentionné est égal à l'aire de sa base D .

- 1) À l'aide du changement de variable $\frac{x}{a} = \cos(\theta)$, démontrer que l'aire de l'ellipse $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$ est πab .

Commentaire : On verra plus tard comment calculer cette aire en utilisant une version du théorème de changement de variable pour les intégrales doubles.

1.3 Intégrale double en tant que quantité totale d'un élément distribué dans une région plane suivant une densité surfacique f

Les valeurs de la fonction f peuvent représenter une **densité**, c'est-à-dire **une mesure de concentration d'une certaine quantité** (comme la masse, la charge, l'énergie, ou même une probabilité) **par unité de mesure d'espace** (par exemple m^3, m^2 et m si l'espace est respectivement modélisé avec trois dimensions, deux ou une). Dans ce cas, la fonction f associe à chaque point de la région D une valeur qui quantifie la **densité locale** de la propriété étudiée. Cette association permet de modéliser des variations de densité au sein de D , offrant ainsi une vision détaillée de la distribution spatiale de la propriété. Par exemple, dans le contexte thermodynamique, $f(x, y, z)$ pourrait représenter la densité de chaleur à chaque point donné, permettant l'analyse de la distribution de température dans un corps. C'est ce que l'on a déjà vu en modélisant l'espace avec une seule dimension avec la distribution de température $x \mapsto u(x, 1)$ dans une tige métallique à l'instant $t = 1$ dans les questions 2)b) et 2)c) de la section 4.1 du cours « Exercices avec cours intégré sur les opérateurs vectoriels ».

L'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ fournit une mesure totale de la quantité étudiée contenue dans la région D .

Par exemple, si $f(x, y)$ représente la densité (**locale**) de masse au point (x, y) , elle peut s'exprimer en g/m^2 et, si dx et dy s'expriment en m , une analyse dimensionnelle fournit :

$$\begin{aligned} \text{unité de } f(x, y) dx dy &= \text{unité de } f(x, y) \times \text{unité de } dx \times \text{unité de } dy \\ &= \frac{g}{m^2} \times m \times m \\ &= g \end{aligned}$$

L'intégrale sur D de la densité de masse donne ainsi la masse totale contenue dans la région D .

Remarque : Pour unifier cette nouvelle compréhension de l'intégrale comme **quantité totale d'un élément distribué dans une région** plane avec la façon de la penser comme le volume totale sous la représentation graphique de f , on peut aussi imaginer $f(x, y)$ comme « la densité locale de volume », c'est-à-dire la quantité de m^3 occupés par une région de l'espace (en 3 dimensions) comprise sous la représentation graphique de f au point (x, y) par nombre de m^2 occupés par sa base.

Dans cette conceptualité, on retrouve $f(x, y)$ comme « le champ scalaire altitude », sa représentation graphique comme « le relief dans la région D » et l'analyse dimensionnelle donnerait bien dans ce cas une unité de volume :

$$\begin{aligned} \text{unité de } f(x, y) dx dy &= \text{unité de } f(x, y) \times \text{unité de } dx \times \text{unité de } dy \\ &= \frac{m^3}{m^2} \times m \times m \\ &= m^3 \end{aligned}$$

1.3.1 Application en physique

1.3.1.1 Calculer la masse d'un objet plat

Si D représente l'étendue d'un objet plat et si f est sa densité surfacique, alors $\iint_D f(x, y) dx dy$ est la masse de cet objet.

- 1) On considère une plaque triangulaire dont on repère les sommets par $O = (0;0)$, $A = (1;0)$ et $B = (0;2)$. On suppose que sa densité surfacique au point (x, y) est $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.
Calculer la masse de cette plaque.

1.3.1.2 Déterminer le centre d'inertie d'un objet plat

Si D représente l'étendue d'un objet plat et si f est sa densité surfacique, alors le centre d'inertie (x_G, y_G) de cet objet est donné par :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \iint_D x f(x, y) dx dy \\ y_G = \frac{1}{M} \iint_D y f(x, y) dx dy \\ \text{où } M \text{ est la masse de l'objet plat} \end{cases}$$

- 1) Déterminer le centre d'inertie de la plaque triangulaire mentionnée dans la section précédente.

1.3.1.3 Application en économie

Voir « 07/07 TOMIC A3 Rattrapage Opérateurs, fonctions plusieurs variables G, INFO, BTP »

1.4 Changement de variables dans une intégrale double

Théorème de changement de variables pour les intégrales doubles (ou formule du Jacobien pour les intégrales doubles)

Soient Δ une autre région de type I ou II et $\Psi : \Delta \rightarrow D$ une application qui réalise une bijection de Δ privé éventuellement d'une partie d'aire nulle vers D privé éventuellement d'une partie d'aire nulle telle que Ψ et Ψ^{-1} sont toutes les deux de classe \mathcal{C}^1 .

On note ψ_x et ψ_y les fonctions composantes de Ψ . Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in \Delta, \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\Psi(x, y)) \cdot \left(\text{valeur absolue de } \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_x}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_y}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Ce déterminant est appelé} \\ \text{le jacobien de } \Psi}} \right) dx dy$$

- 1) On note :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\} \quad \Psi : \begin{array}{l} [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow D \\ (r, \theta) \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$$

On admet que Ψ réalise une bijection de classe \mathcal{C}^1 de $]0, R[\times]0, 2\pi[$ vers $D \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < R, y = 0\}$ et que Ψ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 .

- Représenter la région D .
- Démontrer que D et Δ sont des régions de type I.
- Quelles sont les fonctions composantes de Ψ que l'on note alors ψ_x et ψ_y .
- Déterminer pour tout $(r, \theta) \in]0, R[\times]0, 2\pi[$ la dite matrice jacobienne $J\Psi(r, \theta)$ de Ψ en (r, θ) suivante :

$$J\Psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \psi_y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

e) Appliquer le théorème de changement de variables pour retrouver que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2 .

2) En considérant

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad \Psi : \begin{array}{l} [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow D \\ (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} ar \cos(\theta) \\ br \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$$

Appliquer le théorème de changement de variables pour retrouver que l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b est πab .

3) Avec le changement de variables $u = \frac{x}{y}$ et $v = \frac{y^2}{x}$, calculer :

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy \quad \text{avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x, x < y^2 < 2x\}$$

1.4.1 Changement de variables affine

Définition (Changement de variables affine).

On appelle **changement de variables affine** un changement de variables de la forme :

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d, e, f \text{ des réels}$$

1) À l'aide d'un changement de variables affine, calculer :

$$\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dx dy$$

2) On note :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x+y+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-x-1}{2}\right)^2 \leq 1 \right\} \quad f : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x-y+1)(x+y+2)e^{(x-y+1)^2} \end{array} \quad D(0; 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

a) Comme il est difficile d'écrire D sous la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, il est difficile de calculer directement $\iint_D f(x, y) dx dy$.

En revanche, comme on a rappellons le encore $D(0; 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$, on peut calcu-

ler par intégrations successives $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(\Psi(x, y)) \cdot \left(\text{valeur absolue de } \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_x}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_y}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} \right) dy dx = \dots$
Ce déterminant est appelé le jacobien de Ψ .

Il est donc naturel de chercher à appliquer le théorème de changement de variables avec un changement de variables $\psi : D(0; 1) \rightarrow D$. On cherche alors un tel changement de variables dans les trois questions suivantes :

i) On note :

$$\begin{cases} u = \frac{x+y+2}{3} \\ v = \frac{y-x-1}{2} \end{cases}$$

Démontrer que :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(0; 1) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$$

ii) Démontrer que :

$$\begin{cases} x = \frac{3u-2v-3}{2} \\ y = \frac{3u+2v-1}{2} \end{cases}$$

iii) En déduire un **changement de variables affine** Ψ adéquat.

b) Appliquer le théorème de changement de variables pour démontrer que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = -18 \iint_{D(0;1)} u v e^{4v^2} du dv$$

c) Démontrer que :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

3) Retrouver l'aire de l'ellipse D de demi-axes a et b suivante en l'exprimant en fonction de l'aire d'un disque de rayon 1 via un changement de variables affine :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

1.4.2 Changement de variables polaires

Définition (Changement de variables polaire).

On appelle changement de variables polaire le changement de variable suivant que l'on a utilisé dans la question 1 de la section 1.4 :

$$\Psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c, d, e, f \text{ des réels}$$

1) Via un changement de variables polaire, calculer :

a)

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \quad \text{avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

b)

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad \text{avec } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

Indication : Remarquer que D est un disque.

1.5 Formule de Green-Riemann

Dans toute cette section :

- On note \mathcal{C} le bord de la région D .
- \vec{V} est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 défini sur une région du plan Δ qui contient la région D et tel qu'aucun point de \mathcal{C} n'appartient à la frontière de Δ .
- a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de la courbe \mathcal{C} de classe \mathcal{C}^1 par morceaux dont la dérivée ne s'annule pas.

1.5.1 Pour les étudiants qui sont très à l'aise et qui veulent faire le lien avec le rotationnel d'un champ de vecteurs et sa circulation le long du bord d'une région de type I

Lire et faire les exercices de la section 7 du [document « Exercices avec cours intégré sur le calcul intégral »](#).

Théorème (Formule de Green-Riemann).

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} d\gamma = \iint_D (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_z dx dy$$

Remarque : Cette formule est cohérente avec le fait que la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel le long d'une courbe régulière et fermée (vérifiant les mêmes hypothèses que γ dans cette section) est nulle. En effet, d'après le théorème de Green-Riemann, cette circulation est l'intégrale double sur une région de type I de la fonction nulle puisque le rotationnel d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel est nul (car le rotationnel du gradient d'un champ scalaire est nul (Voir la section 11.3 du [document « Exercices avec cours intégré sur les opérateurs vectoriels »](#))).

1.5.2 Pour les étudiants qui souhaite étudier la formule de Green-Riemann directement, en reportant éventuellement à plus tard son interprétation en terme de rotationnel d'un champ de vecteurs et de sa circulation le long du bord d'une région de type I

Théorème (Formule de Green-Riemann).

$$\int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \iint_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial V_x}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

1.5.3 Calculer la circulation d'un champ de vecteurs le long du bord d'une région de type I ou l'intégrale double d'un champ scalaire sur une région de type I via la formule de Green-Riemann

- 1) On suppose que D est la région délimitée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$ et que :

$$\vec{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} d\gamma = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, la circulation du champ de vecteurs \vec{V} le long du bord de D .

- 2) On suppose que :

$$\vec{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\gamma: [-1; \frac{\pi}{2} + 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t \in [-1; 0] \\ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} & \text{si } t \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} + 1 - t \end{pmatrix} & \text{si } t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 1] \end{cases}$$

- a) En utilisant le paramétrage du bord de D (noté \mathcal{C}), calculer $\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} d\gamma = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, la circulation du champ de vecteurs \vec{V} le long du bord de D .
- b) Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.
- 3) On suppose que D est la région délimitée par l'axe des ordonnées et la courbe paramétrée par :

$$\delta: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} a(t - \sin(t)) \\ a(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

- a) On suppose que :

$$\vec{V}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Calculer $(\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$, la troisième composante du rotationnel du champ de vecteurs \vec{V} .

- b) En utilisant la question précédente et la formule de Green-Riemann, calculer l'aire de D .
- Indications : S'inspirer de la question 2 pour « fabriquer » un paramétrage du bord de D .
- 4) On suppose que :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

On note :

$$J = \iint_D (2x^3 - y) dx dy$$

$$\vec{U}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x^3 - y \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer **un potentiel vecteur** du champ de vecteurs \vec{U} , c'est-à-dire un champ de vecteurs \vec{A} tel que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{U}$$

- b) En déduire que :

$$J = \frac{4}{15} a^4 b - \frac{ab^2}{3}$$

Indications : S'inspirer de la question 2 pour « fabriquer » un paramétrage du bord de D à partir du paramétrage d'une partie de ce bord suivant :

$$\delta: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

2 Intégrales triples

Dans toute cette section « Intégrales triples » :

- D est une région de l'espace qui peut s'écrire comme dans la formule encadrée dans la prochaine sous-section.
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D .

2.1 Découper en tranches pour pouvoir réaliser trois intégrations successives

Dans les sections 1.1 et 1.2, on additionne toutes les contributions $f(x, y) dx dy$ quand (x, y) parcourt les intersections d'un quadrillage d'une région du plan formant des petits rectangles de dimensions dx et dy . Ainsi, si comme dans la section 1.3.1.1, cette région est l'étendue d'un objet plat et $f(x, y)$ est la masse par unité de surface de cet objet (au point (x, y)), alors $f(x, y) dx dy$ est une bonne approximation de la masse du petit rectangle de sommets (x, y) , $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$ et $(x + dx, y + dy)$ par la masse qu'aurait ce petit rectangle si sa densité de masse était constante égale à la densité de masse réelle en le point (x, y) . Et la somme de tous les $f(x, y) dx dy$ quand (x, y) parcourt les intersections du quadrillage est une bonne approximation de la masse de cet objet quand les rectangles du quadrillage d'aire $dx dy$ sont petits. C'est aussi une bonne approximation du volume de la région de l'espace $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ mais cette interprétation de l'intégrale double ne permet pas la généralisation jusqu'à l'intégrale triple que nous cherchons à comprendre dans cette section.

Si l'on souhaite maintenant calculer la masse d'un objet non aplati dont la masse par unité de volume au point (x, y, z) est $f(x, y, z)$, alors on additionne de la même façon toutes les contributions $f(x, y, z) dx dy dz$ quand (x, y, z) parcourt les intersections d'une grille tridimensionnelle dans la région de l'espace où s'étend cet objet et on considère la limite de cette somme quand les dimensions dx , dy et dz des petits pavés de ce quadrillage tridimensionnel tendent vers 0.

Afin de pouvoir réaliser trois intégrations successives, on procède donc comme dans la partie 1.1.3 **en découpant la région en tranches mais suivant une dimension supplémentaire** en l'écrivant sous la forme suivante (à permutation des variables et modification de relation d'ordre large en relation d'ordre strict près) :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Par exemple, voici un tel découpage de la boule de rayon R centrée en l'origine :

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -R \leq x \leq R, y^2 + z^2 \leq R^2 - x^2\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -R \leq x \leq R, \underbrace{-\sqrt{R^2 - x^2}}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{g_2(x)}, z^2 \leq R^2 - x^2 - y^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -R \leq x \leq R, \underbrace{-\sqrt{R^2 - x^2}}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{g_2(x)}, \underbrace{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}_{u_1(x, y)} \leq z \leq \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}_{u_2(x, y)} \right\} \end{aligned}$$

2.2 Définitions

2.2.1 Intégrale d'une fonction de trois variables sur une région de l'espace tridimensionnel

Définition (Intégrale d'une fonction de trois variables sur une région de l'espace tridimensionnel).

On appelle intégrale de f sur D et on note $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ le nombre suivant :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

2.2.2 Volume d'une région de l'espace tridimensionnel

Définition (Volume d'une région de l'espace tridimensionnel).

On appelle volume de D le nombre suivant :

$$\iiint_D 1 dx dy dz$$

2.3 Méthodes de calcul et applications

2.3.1 Calculer un volume avec une intégrale triple

- 1) Calculer le volume de la boule B de rayon R centrée en l'origine sans utiliser ni la technique utilisée dans la question 9) de la section 1.1.3 ni le théorème de changement de variables pour les intégrales triples que l'on verra bientôt) :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

2.3.2 Utiliser les propriétés de linéarité et de séparation des variables

Propriété de linéarité des intégrales doubles

Soient D une région de type I (ou II), λ, μ deux nombres réels et $g : D \rightarrow \mathbb{R}, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors :

$$\iint_D \lambda \cdot g(x, y) + \mu \cdot h(x, y) dx dy = \lambda \cdot \iint_D g(x, y) dx dy + \mu \cdot \iint_D h(x, y) dx dy$$

Propriété de séparations des variables pour les intégrales doubles

Soient a, b, c, d des réels tels que $a < b, c < d$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors :

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) h(y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

Une intégrale triple consistant en trois intégrations successives, on obtient aisément une généralisation de ces deux propriétés aux intégrales triples qui prend les formes suivantes :

$$\iiint_D \lambda \cdot g(x, y, z) + \mu \cdot h(x, y, z) dx dy dz = \lambda \cdot \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz + \mu \cdot \iiint_D h(x, y, z) dx dy dz$$

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} g(x) h(y) u(z) dx dy dz = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right) \left(\int_e^f u(z) dz \right)$$

- 1) En utilisant les propriétés de linéarité et de séparation des variables, calculer les intégrales suivantes :

a)

$$\iint_{D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0;2] ; y \in [1;2]\}} (x+y) 3^{x+y} dx dy$$

b)

$$\iiint_{[0;1] \times [1;2] \times [2;3]} (x^2 - 2yz) dx dy dz$$

c)

$$\iiint_{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq 1\}} (1 - 2yz) dx dy dz$$

2.3.3 Applications en physique

2.3.3.1 Calculer la quantité totale et la quantité moyenne d'un matériau

- 1) Un matériau est réparti dans le cube $[0; R] \times [0; R] \times [0; R]$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(1+z)^2}$.

a) Calculer le volume de ce cube.

b) En utilisant la propriété de linéarité et la propriété de séparation des variables, calculer la quantité totale du matériau.

c) Calculer la quantité moyenne du matériau.

2.3.3.2 Déterminer un centre de gravité

1) On rappelle que si $f(x, y, z)$ est la densité volumique de masse au point (x, y, z) et que si M est la masse totale de l'objet qui s'étend sur la région D , alors en notant $X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$ le centre d'inertie de l'objet qui s'étend sur la région D , on a :

$$X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \iiint_D f(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx dy dz$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} x_m = \frac{1}{M} \iiint_D f(x, y, z) \cdot x dx dy dz \\ y_m = \frac{1}{M} \iiint_D f(x, y, z) \cdot y dx dy dz \\ z_m = \frac{1}{M} \iiint_D f(x, y, z) \cdot z dx dy dz \end{cases}$$

On note :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R, 0 \leq z \leq R, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad X_m = \begin{pmatrix} \frac{3R}{8} \\ \frac{3R}{8} \\ \frac{3R}{8} \end{pmatrix}$$

On suppose que la masse volumique de l'objet qui s'étend sur la région D est constante. Démontrer que le centre d'inertie de ce huitième de boule D est X_m .

2.4 Changement de variables dans une intégrale triple

Théorème de changement de variables pour les intégrales triples (ou formule du Jacobien pour les intégrales triples)

Soient Δ une autre région de la même forme que D et $\Psi : \Delta \rightarrow D$ une application qui réalise une bijection de Δ privé éventuellement d'une partie de volume nul vers D privé éventuellement d'une partie de volume nul telle que Ψ et Ψ^{-1} sont toutes les deux de classe \mathcal{C}^1 .

On note ψ_x, ψ_y et ψ_z les fonctions composantes de Ψ . Autrement dit :

$$\forall (x, y, z) \in \Delta, \Psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \psi_x(x, y, z) \\ \psi_y(x, y, z) \\ \psi_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(\Psi(x, y, z)) \cdot \left(\text{valeur absolue de } \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_x}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_x}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_y}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_y}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_z}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \psi_z}{\partial z}(x, y, z) \end{vmatrix}}_{\text{Ce déterminant est appelé le jacobien de } \Psi} \right) dx dy dz$$

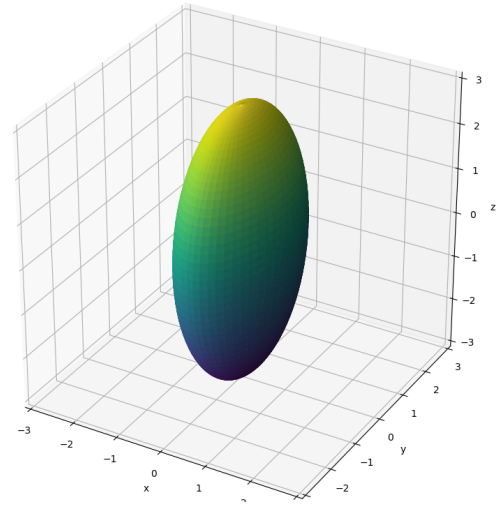
2.4.1 Changement de variables affine

Définition (Changement de variables affine).
On appelle **changement de variables affine** un changement de variables de la forme :

$$\Psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} ax + by + cz + u \\ dx + ey + fz + v \\ gx + hy + kz + w \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, e, f, g, h, k, u, v, w$ des réels

Ellipsoïde de demi-axes 1, 2 et 3



- 1) Calculer le Jacobien d'un tel changement de variables.
- 2) Calculer le volume de l'ellipsoïde $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$ en appliquant la formule du Jacobien pour les intégrales triples.

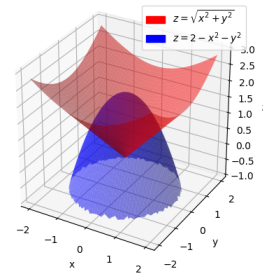
2.4.2 Changement de variables cylindrique

Définition (Changement de variables affine).
On appelle **changement de variables cylindrique** un changement de variables de la forme :

$$\Psi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le Jacobien d'un tel changement de variables.
- 2) Calculer le volume de la région délimitée par le demi-cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le parabolôïde d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$.

Un demi-cône et un parabolôïde



2.4.3 Changement de variables sphérique

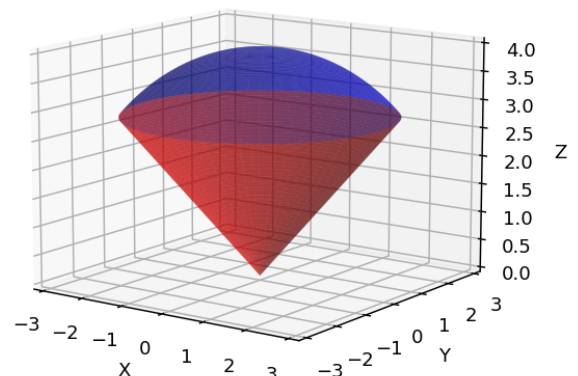
Définition (Changement de variables sphérique).
On appelle **changement de variables sphérique** un changement de variables de la forme :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

- 1) Démontrer que le Jacobien d'un tel changement de variables est $-r^2 \sin(\phi)$.
- 2) Retrouver le volume d'une boule de rayon R en appliquant la formule du Jacobien pour les intégrales triples.
- 3) On considère un objet qui s'étend dans la région de l'espace représentée ci-contre. Il s'agit de la région délimitée par la sphère de rayon d'équation (en coordonnées sphériques) $r = 4 \text{ m}$ et du cône d'équation (en coordonnées sphériques) $\phi = \frac{\pi}{4}$. La masse volumique ρ est également donnée dans les coordonnées sphériques :

Région délimitée par le cône $\phi = \frac{\pi}{4}$ et la sphère $r = 4$

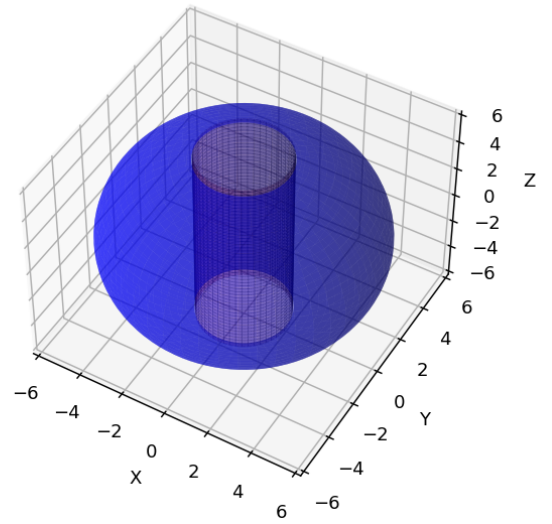
$$\rho = \frac{12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{r}$$



Calculer la masse de cet objet.

- 4) Une boule de rayon de 6 cm est percée d'un trou ayant un rayon de 2 cm . On obtient alors l'anneau sphérique ci-contre.
Calculer le volume de cet anneau sphérique.

Boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ trouée par le cylindre $x^2 + y^2 \leq 4$



3 Quelques prolongements théoriques hors programme « pour aller plus loin »

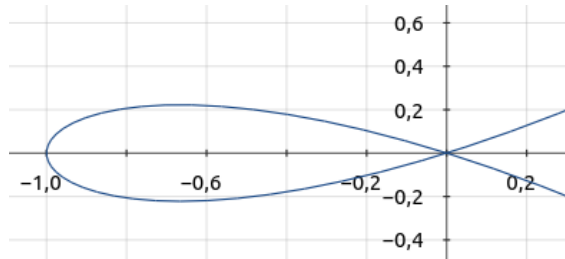
3.1 Applications en géométrie différentielles

3.1.1 Calculer la longueur d'une courbe non droite

Lire la section 6 du document « Exercices avec cours intégré sur le calcul intégral ».

On souhaite calculer la longueur de la boucle de la courbe paramétrée dont les fonctions coordonnées et l'image sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



- 1) Déterminer $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\begin{cases} x(s) = x(t) \\ y(s) = y(t) \\ s \neq t \end{cases}$$
- 2) En déduire la longueur de la boucle.

3.1.2 Calculer l'aire d'une surface non plane

Théorème de l'aire d'une surface paramétrique

Soient D une région du plan de type I ou II et \mathcal{S} une surface de \mathbb{R}^3 admettant une paramétrisation $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^1 dont les dérivées partielles ne sont colinéaires en aucun point.

Alors :

$$\text{Aire de la surface } \mathcal{S} = \iint_D \left\| \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy$$

- 1) Calculer l'aire d'une sphère de rayon R .
- 2) Calculer l'aire de la surface de la partie du parabolöide d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ qui est en dessous du plan d'équation $z = 4$ et au-dessus du plan d'équation $z = 1$.

3.2 Applications en physique (en cours de rédaction)

3.2.1 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface (en cours de rédaction)

3.2.2 Théorème de la divergence (ou formule de Green-Ostrogradski) (en cours de rédaction)

3.2.3 Formule de Stokes (en cours de rédaction)