CORRECTION DES EXERCICES SUR LES INTÉGRALES MULTIPLES QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

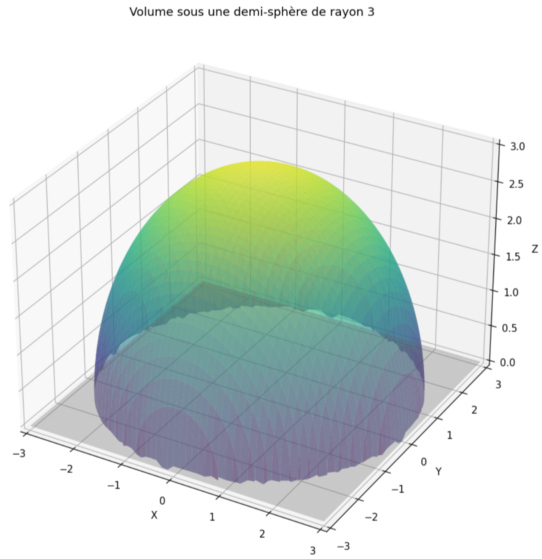
1 Volume d'une demi-boule avec un changement de variable de dimension 1 (*section 1.1.3 question 9 du cours*)

1.1 Énoncé

Retrouver le volume d'une demi-boule de rayon R en choisissant :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

$$f: \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{array}$$



Indication : Utiliser le changement de variable :

$$\cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Commentaire : On verra plus tard comment calculer ce volume plus rapidement en utilisant une version du théorème de changement de variable pour les intégrales doubles et notament le passage en coordonnées polaires.

1.2 Correction

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy &= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{\left(R^2 - x^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2\right)} dy \\
&= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dy \\
&= \sqrt{R^2 - x^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dy \qquad \left(\text{On va faire le changement de variable } \cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \\
&= \sqrt{R^2 - x^2} \int_{\pi}^{0} \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \left(-\sqrt{R^2 - x^2} \sin(\theta)\, d\theta\right) \quad \text{via} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}} \\ \frac{dy}{d\theta} = y'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{R^2 - x^2} \cos(\theta)\right) \\ \frac{dy}{d\theta} = -\sqrt{R^2 - x^2} \sin(\theta) \\ \boxed{dy = -\sqrt{R^2 - x^2} \sin(\theta)\, d\theta} \\ \text{Quand } y = -\sqrt{R^2 - x^2},\ \cos(\theta) = -1 \\ \text{Quand } y = \sqrt{R^2 - x^2},\ \cos(\theta) = 1 \\ \text{Quand } \theta = \pi,\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \\ \text{Quand } \theta = 0,\ y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ \boxed{\text{« Suivant } \theta \text{ », on intègre de } \pi \text{ jusqu'à } 0.} \end{array} \right. \\
&= \left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \sin(\theta)\, d\theta \\
&= \left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} |\sin(\theta)| \sin(\theta)\, d\theta \qquad (\text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1) \\
&= \left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} \sin(\theta) \sin(\theta)\, d\theta \qquad (\text{car } \forall \theta \in [0;\pi],\ \sin(\theta) \ge 0) \\
&= \left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta \\
&= \left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\theta))\, d\theta \qquad (\text{car } \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right) \int_0^{\pi} 1 - \cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right) \left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(R^2 - x^2\right)$$

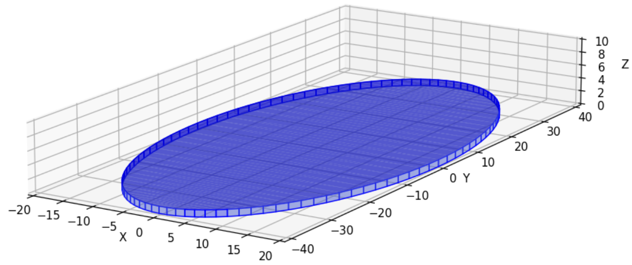
$$\begin{aligned}
\text{Volume d'une demi-boule de rayon } R &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy \\
&= \iint_{\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; -R \le x \le R,\; -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\right\}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dy \right) dx \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2}\left(R^2 - x^2\right) dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\
&= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

2 Aire d'une ellipse avec un changement de variable de dimension 1 (*section 1.2.2 question 1 du cours*)

2.1 Énoncé

À l'aide du changement de variable $\frac{x}{a} = \cos(\theta)$, démontrer que l'aire de l'ellipse $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$ est πab.

Commentaire : On verra plus tard comment calculer cette aire en utilisant une version du théorème de changement de variable pour les intégrales doubles.



Le volume de la région de l'espace délimitée par les surfaces d'équations $z = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, $z = 1$ est égal à l'aire de sa base D.

2.2 Correction

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a,\ \underbrace{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_2(x)}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{aire de l'ellipse } D &= \iint_D 1 dxdy \\
&= \iint_{\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -a\leq x\leq a,\ \underbrace{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_1(x)} \leq y \leq \underbrace{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{g_2(x)}\right\}} 1 dxdy \\
&= \int_{-a}^{a} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy\right) dx \\
&= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} 1 dy\right) dx \\
&= \int_{-a}^{a} [y]_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx \\
&= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \\
&= 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \\
&= 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \qquad \text{(On va faire le changement de variable } \cos(\theta) = \frac{x}{a}) \\
&= 2b\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\,(-a\sin(\theta)\,d\theta) \qquad \text{via } \left\{\begin{array}{l}
\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{a}} \\
\frac{dx}{d\theta} = x'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(a\cos(\theta)) \\
\frac{dx}{d\theta} = -a\sin(\theta) \\
\boxed{dx = -a\sin(\theta)\,d\theta} \\
\text{Quand } x = -a,\ \cos(\theta) = -1 \\
\text{Quand } x = a,\ \cos(\theta) = 1 \\
\text{Quand } \theta = \pi,\ x = -a \\
\text{Quand } \theta = 0,\ x = a \\
\boxed{\text{« Suivant } \theta \text{ », on intègre de } \pi \text{ jusqu'à } 0.}
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2ab\int_0^{\pi} |\sin(\theta)|\sin(\theta)\,d\theta \qquad (\text{car } \cos^2+\sin^2=1)\\
&= 2ab\int_0^{\pi} \sin(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \qquad (\text{car } \forall\theta\in[0;\pi],\ \sin(\theta)\geq 0)\\
&= 2ab\int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\,d\theta \qquad (\text{car } \forall\theta\in[0;\pi],\ \sin(\theta)\geq 0)\\
&= 2ab\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\,d\theta \qquad (\text{car } \cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta))\\
&= ab\int_0^{\pi} 1-\cos(2\theta)\,d\theta\\
&= ab\left[\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi}\\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

3 Changements de variables affines dans une intégrale double pour se ramener à une intégrale sur le disque de rayon 1 centré en l'origine (*section 1.4.1 du cours*)

3.1 Énoncé

1) À l'aide d'un changement de variables affine, calculer :

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\}} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dxdy$$

2) On note :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ \left(\frac{x+y+2}{3}\right)^2+\left(\frac{y-x-1}{2}\right)^2\leq 1\right\} \qquad f: \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & (x-y+1)(x+y+2)e^{(x-y+1)^2} \end{array} \qquad D(0;1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ x^2+y^2\leq 1\right\}$$

a) Comme il est difficile d'écrire D sous la forme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ a\leq x\leq b,\ g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$, il est difficile de calculer directement $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

En revanche, comme on a rappellons le encore $D(0;1)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \ | \ -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$, on peut calculer par intégrations successives $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(\Psi(x,y))\cdot\left(\text{valeur absolue de } \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_x}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\psi_x}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\psi_y}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\psi_y}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}}_{\text{Ce déterminant est appelé le jacobien de }\Psi.}\right)dy\right)dx=\ldots$.

Il est donc naturel de chercher à appliquer le théorème de changement de variables avec un changement de variables $\psi: D(0;1)\to D$. On cherche alors un tel changement de variables dans les trois questions suivantes :

i) On note :

$$\begin{cases} u=\frac{x+y+2}{3} \\ v=\frac{y-x-1}{2}\end{cases}$$

Démontrer que :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in D(0;1) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in D$$

ii) Démontrer que :

$$\begin{cases} x=\frac{3u-2v-3}{2} \\ y=\frac{3u+2v-1}{2}\end{cases}$$

iii) En déduire un **changement de variables affine** Ψ adéquat.

b) Appliquer le théorème de changement de variables et la propriété de linéarité de l'intégrale double donnée en indication ci-dessous pour démontrer que

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=-18\iint_{D(0;1)} uve^{4v^2}\,dudv$$

c) Démontrer que :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=0$$

3) Retrouver l'aire de l'ellipse D de demi-axes a et b suivante en l'exprimant en fonction de l'aire d'un disque de rayon 1 via un changement de variables affine :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ | \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

3.2 Correction

1) Comme il serait plus aisé d'intégrer $(u,v)\mapsto\left(\frac{u}{v}\right)^4$, on est naturellement amené à penser au changement de variables :

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y\end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 2x \\ u - v = -2y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{-u+v}{2} \end{cases}$$

On souhaite alors appliquer le théorème de changement de variables avec un changement de variables de la forme suivante :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \textbf{?} & \to & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\right\} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{-u+v}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminons la nouvelle région d'intégration (« **?** ») :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{-u+v}{2} \leq 1 - \frac{u+v}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0 \leq \frac{u+v}{2} \\ \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{-u+v}{2} \\ \frac{-u+v}{2} \leq 1 - \frac{u+v}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -u \leq v \\ \frac{u+v}{2} \leq 1 \quad \text{(Cette inégalité est vraie si celles des autres lignes sont vérifiées)} \\ u \leq v \\ v \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -u \leq v \\ u \leq v \\ v \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} max(u, -u) \leq v \\ v \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |u| \leq v \\ v \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ |u| \leq v \leq 1 \end{cases}$$

On applique donc le théorème de changement de variables avec le changement de variables suivant :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \overbrace{\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u \leq 1,\ |u| \leq v \leq 1\right\}}^{\Delta} & \to & \overbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\right\}}^{D} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{-u+v}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

On calcule $Jac\Psi$, le Jacobien de Ψ :

$$\begin{aligned} Jac\Psi(u,v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-u+v}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-u+v}{2}\right) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(On a noté Ψ_x et Ψ_y les fonctions composantes de Ψ.)

On applique le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dxdy &= \iint_\Delta \left(\frac{u}{v}\right)^4 |Jac\Psi(u,v)|\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^4 \left(\int_{|u|}^{1} v^{-4} dv\right) du \end{aligned}$$

⚠Ne pas oublier la valeur absolue !

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^4 \left[\frac{v^{-3}}{-3}\right]_{|u|}^{1} du \\
&= -\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} u^4 \left[v^{-3}\right]_{|u|}^{1} du \\
&= -\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} u^4 \left(1-|u|^{-3}\right) du \\
&= -\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} \left(u^4-|u|\right) du \\
&= -\frac{1}{6}2\int_{0}^{1} \left(u^4-|u|\right) du \qquad \text{(car } u\mapsto u^4-|u| \text{ est paire et } [-1;1] \text{ admet 0 comme centre de symétrie)} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{1} u^4 du - \int_{0}^{1} u du\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{30}(2-5) \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

2) *a*) *i*)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(0;1) &\iff u^2+v^2 \leq 1 \\
&\iff \left(\frac{x+y+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-x-1}{2}\right)^2 \leq 1 \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} u = \frac{x+y+2}{3} \\ v = \frac{y-x-1}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} 3u = x+y+2 \\ 2v = y-x-1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3u-2v = 2x+3 \\ 3u+2v = 2y+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3u-2v-3 = 2x \\ 3u+2v-1 = 2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{3u-2v-3}{2} = x \\ \frac{3u+2v-1}{2} = y \end{cases}
\end{aligned}
$$

iii) On note :

$$
\begin{array}{rccc}
\Psi: & D(0;1) & \to & D \\
& (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{3u-2v-3}{2} \\ \frac{3u+2v-1}{2} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

b) Calculons le jacobien du changement de variables Ψ :

$$
\begin{aligned}
Jac(\Psi)(u,v) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi_y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{3u-2v-3}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{3u-2v-3}{2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{3u+2v-1}{2}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{3u+2v-1}{2}\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{3}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times(-1) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

On applique le théorème de changement de variables pour les intégrales doubles :

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D(0;1)} f(\Psi(u,v))\,|Jac(\Psi)(u,v)|\,dudv && \text{⚠Ne pas oublier la valeur absolue!}\\ &= \iint_{D(0;1)} (-2v-1+1)(3u-2+2)\,e^{(-2v-1+1)^2}\,|3|\,dudv && \text{⚠Ne pas oublier la valeur absolue!}\\ &= 3\iint_{D(0;1)} -6uve^{4v^2}\,dudv\\ &= -18\iint_{D(0;1)} uve^{4v^2}\,dudv\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= -18\iint_{D(0;1)} uve^{4v^2}\,dudv\\ &= -18\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} uve^{4v^2}\,dv\right)du\\ &= -18\int_{-1}^{1}\frac{u}{8}\left(\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 8ve^{4v^2}\,dv\right)du\\ &= -18\int_{-1}^{1}\frac{u}{8}\left[e^{4v^2}\right]_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}du\\ &= -18\int_{-1}^{1}\frac{u}{8}\times 0\,du\\ &= 0\end{aligned}$$

3)

4 Changements de variables polaire dans une intégrale double pour se ramener à une intégrale sur le disque de rayon 1 centré en $(1;0)$ (*section 1.4.2 question 1)b) du cours*)

4.1 Énoncé

Via un changement de variables polaire, calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \qquad \text{avec } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x\le 0\right\}$$

<u>Indication :</u> Remarquer que D est un disque.

4.2 Correction

On commence par remarquer que D est un disque.
En effet :

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2x\le 0 &\iff (x-1)^2-1+(y-0)^2\le 0\\ &\iff (x-1)^2+(y-0)^2\le 1\\ &\iff \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}\le 1\\ &\iff \text{distance entre le point } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et le point } \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\le 1\end{aligned}$$

D est donc le disque de centre $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1.

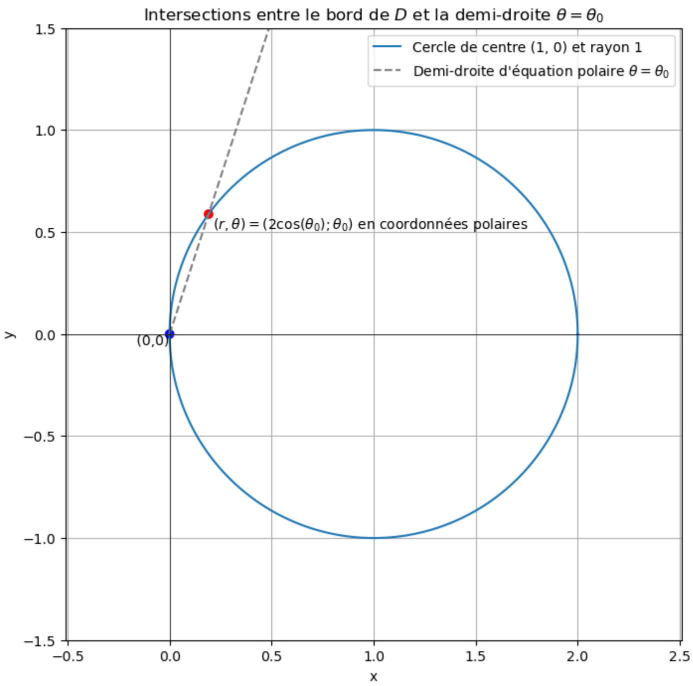
Comme il serait plus aisé d'intégrer $(r,\theta)\mapsto r$ (Se rappeler que $(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2=r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)=r^2$), on est naturellement amené à penser au changement de variables polaire :

$$\begin{cases} x=r\cos(\theta)\\ y=r\sin(\theta)\end{cases}$$

L'inéquation du disque $x^2+y^2-2x\le 0$ (privé en fait de $(0;0)$ puisque ce point ne s'écrit pas en coordonnées polaires) s'écrit en coordonnées polaires :

$$r^2-2r\cos(\theta)\le 0$$

Comme D (privé en fait de $(0;0)$ puisque ce point ne s'écrit pas en coordonnées polaires) est strictement inclus dans le demi-plan strict d'inéquation $x > 0$ donc tous ses points ont pour argument θ une valeur appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Et réciproquement, pour chaque valeur de $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, la demi-droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$ rencontre le bord du disque D en exactement deux points dont l'un est $(0;0)$ et dont les coordonnées polaires de l'autre sont $(2\cos(\theta_0);\theta_0)$:



En effet, pour $r \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} r^2 - 2r\cos(\theta) \leq 0 &\iff r^2 \leq 2r\cos(\theta) \\ &\iff r \leq 2\cos(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, dans le changement de variable polaire pour intégrer sur D, la nouvelle région d'intégration Δ est la région de type II suivante :

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < r \leq 2\cos(\theta) \right\}$$

On applique alors finalement le théorème de changement de variables avec le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \Delta & \to & D \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_\Delta r\,|J\Psi(r,\theta)|\,dr\,d\theta \\ &= \iint_\Delta r.r\,dr\,d\theta \\ &= \iint_\Delta r^2\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos(\theta)} r^2\,dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8.\cos^3(\theta)}{3}\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

Avant de continuer ce calcul, on linéarise $\cos^3(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right) \\
\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

On revient au calcul de l'intégrale double :

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3\theta)\,d\theta + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{\sin(3\theta)}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{9}\left[\sin(3\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{9}(-1-1)+2(1-(-1)) \\
&= -\frac{4}{9}+4 \\
&= -\frac{4}{9}+\frac{36}{9} \\
&= \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

5 Volume d'une boule de rayon R sans utiliser ni la technique utilisée dans la question 9) de la section 1.1.3 ni le théorème de changement de variables pour les intégrales triples (*section 2.3.1 question 1 du cours*)

5.1 Énoncé

Calculer le volume de la boule B de rayon R centrée en l'origine (sans utiliser ni la technique utilisée dans la question 9) de la section 1.1.3 ni le théorème de changement de variables pour les intégrales triples que l'on verra bientôt) :

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}$$

5.2 Correction

$$\begin{aligned}
\iiint_B 1 dxdydz &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} [z]_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dy\right)dx \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy\right)dx \\
&= 2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy\right)dx \\
&= 2\iint_D \sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \qquad \text{où } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ -R \leq x \leq R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 \leq R^2\right\} \\
&= 2\iint_{[0;R]\times[0;2\pi]} \sqrt{R^2-r^2}rdrd\theta \qquad \text{(via le passage en coordonnées polaires } (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))\text{)} \\
&= 2\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-r^2}rd\theta\right)dr \\
&= 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdr \\
&= -2\pi\left[\frac{2}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

6 Centre d'inertie d'un huitième de boule de rayon R de masse homogène (*section 2.3.3.2 question 1 du cours*)

6.1 Énoncé

On rappelle que si $f(x,y,z)$ est la densité volumique de masse au point (x,y,z) et que si M est la masse totale de l'objet qui s'étend sur la région D, alors en notant $X_m = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$ le centre d'inertie de l'objet qui s'étend sur la région D, on a :

$$X_m = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \iiint_D f(x,y,z).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dxdydz$$

Autrement dit :

$$\left\{\begin{array}{l} x_m = \frac{1}{M}\iiint_D f(x,y,z).xdxdydz \\ y_m = \frac{1}{M}\iiint_D f(x,y,z).ydxdydz \\ z_m = \frac{1}{M}\iiint_D f(x,y,z).zdxdydz \end{array}\right.$$

On note :

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le R,\ 0 \le y \le R,\ 0 \le z \le R,\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\} \qquad X_m = \begin{pmatrix} \frac{3R}{8} \\ \frac{3R}{8} \\ \frac{3R}{8} \end{pmatrix}$$

On suppose que la masse volumique de l'objet qui s'étend sur la région D est constante.
Démontrer que le centre d'inertie de ce huitième de boule D est X_m.

6.2 Correction

On note ρ la densité massique du huitième de boule. C'est une fonction constante par hypothèse. « On fait l'abus de langage d'écrire ρ à la place de $(x,y,z) \mapsto \rho$ » .

On calcule d'abord la masse totale M de ce huitième de boule :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D \rho dxdydz \\ &= \rho \iiint_D dxdydz \\ &= \rho \frac{\text{Volume d'une boule de rayon } R}{8} \\ &= \rho \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8} \\ &= \frac{\rho \pi R^3}{6} \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de x, y, z, les coordonnées de X_m sont égales.
Déterminons y_M :

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{1}{M}\iiint_D \rho.ydxdydz \\ &= \frac{\rho}{M}\iiint_D ydxdydz \\ &= \frac{6}{\pi R^3}\iiint_D ydxdydz \\ &= \frac{6}{\pi R^3}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} ydzdydx \qquad (\text{car } D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}, 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}) \\ &= \frac{6}{\pi R^3}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1dzdydx \\ &= \frac{6}{\pi R^3}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\sqrt{R^2-x^2-y^2}dydx \\ &= \frac{-3}{\pi R^3}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (-2y)\left(R^2-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}} dydx \end{aligned}$$

$$= \frac{-3}{\pi R^3} \int_0^R \left[\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$
$$= \frac{-2}{\pi R^3} \int_0^R \left[\left(R^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$
$$= \frac{-2}{\pi R^3} \int_0^R \left(0^{\frac{3}{2}} - \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) dx$$
$$= \frac{2}{\pi R^3} \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\pi R^3} \int_0^R R^3 \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} dx \qquad \text{(On va faire le changement de variable } \cos(\theta) = \frac{x}{R}\text{)}$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}} \left(-R\sin(\theta)\, d\theta\right) \qquad \text{via} \begin{cases} \boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{R}} \\ \frac{dx}{d\theta} = x'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(R\cos(\theta)\right) \\ \frac{dx}{d\theta} = -R\sin(\theta) \\ \boxed{dx = -R\sin(\theta)\, d\theta} \\ \text{Quand } x = 0,\ \cos(\theta) = 0 \\ \text{Quand } x = R,\ \cos(\theta) = 1 \\ \text{Quand } \theta = \frac{\pi}{2},\ x = 0 \\ \text{Quand } \theta = 0,\ x = R \\ \boxed{\text{« Suivant } \theta \text{ », on intègre de } \frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à 0.}} \end{cases}$$
$$= \frac{2R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) \sin(\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{2R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{2R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \left(\cos(4\theta) - 2\cos(2\theta) + 3\right) d\theta \qquad \text{car : } \sin^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) = \dots$$
$$= \frac{R}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(4\theta) - 2\cos(2\theta) + 3\right) d\theta$$
$$= \frac{R}{4\pi} \left[\frac{\sin(4\theta)}{4} - 2\frac{\sin(2\theta)}{2} + 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{R}{4\pi} \left[3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{R}{4\pi} \frac{3\pi}{2}$$
$$= \frac{3R}{8}$$

7 Changement de variable cylindrique (*section 2.4.2*)

7.1 Énoncé

1) Calculer le Jacobien d'un tel changement de variables.
2) Calculer le volume de la région délimitée par le demi-cône d'équation $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et le paraboloïde d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$.

7.2 Correction

1)

$$\begin{aligned}
Jac\Psi(r,\theta,z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_x}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_x}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\psi_y}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_y}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_y}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\psi_z}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\psi_z}{\partial z}(r,\theta,z) \end{vmatrix} \quad \text{(On a noté } \Psi_x, \Psi_y \text{ et } \Psi_z \text{ les fonctions composantes de } \Psi.\text{)} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\theta)) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos(\theta)) & \frac{\partial}{\partial z}(r\cos(\theta)) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin(\theta)) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin(\theta)) & \frac{\partial}{\partial z}(r\sin(\theta)) \\ \frac{\partial}{\partial r}(z) & \frac{\partial}{\partial\theta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} \quad \text{(en développant le déterminant suivant la dernière colonne)} \\
&= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\
&= r\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \\
&= r
\end{aligned}$$

2) On note D cette région :

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2\right\}$$

Autrement dit, D est l'ensemble des solutions du systèmes d'inéquations suivant :

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2$$

Comme ces deux surfaces sont des surfaces de révolution autour de l'axe des ordonnées, elles admettent des équations beaucoup plus simples en coordonnées cylindriques (« indépendantes de θ »).
En effet, en coordonnées cylindriques, ce système est équivalent à :

$$r \le z \le 2 - r^2$$

Pour appliquer le théorème de changement de variables, on cherche « la nouvelle région d'intégration » Δ.
Dans cette nouvelle région :

- θ prend toutes les valeurs de $[0;2\pi]$ (On pourrait prendre $[0;2\pi[$ mais cela ne change rien au volume de Δ).
- z prend les valeurs de r jusqu'à $2 - r^2$.
- Et r doit solution de l'inéquation $r \le 2 - r^2$ (Et positif!).
  On résout alors cette dernière inéquation :

$$\begin{aligned} r \le 2 - r^2 &\iff r^2 + r - 2 \le 0 \\ &\iff r \text{ est situé entre les racines du trinôme } x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

  Le discriminant de ce trinôme est 3, ses racines sont -2 et 1.
  Ainsi r prend les valeurs de 0 à 1.

En définitive, on considère le changement de variable Ψ suivant :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \Delta & \to & D \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{où } \Delta = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r \le z \le 2 - r^2,\ \right\}$$

On appplique le théorème de changement de variable :

$$\text{Volume de } D = \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint_\Delta |Jac\Psi(r,\theta,z)|\, dr d\theta dz && \text{⚠Ne pas oublier la valeur absolue !}\\
&= \iiint_\Delta r dr d\theta dz\\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^{2-r^2} r dz d\theta dr\\
&= \int_0^1 r.\left(\int_0^{2\pi} \int_r^{2-r^2} dz d\theta\right) dr\\
&= \int_0^1 r.\left(\int_0^{2\pi} 2-r^2-r d\theta\right) dr\\
&= \int_0^1 \left(2r-r^3-r^2\right).\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr\\
&= \int_0^1 \left(2r-r^3-r^2\right).(2\pi)\, dr\\
&= 2\pi \int_0^1 2r-r^3-r^2 dr\\
&= 2\pi \left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1\\
&= 2\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{\pi}{6}(12-3-4)\\
&= \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}
$$

8 Changement de variable sphérique (*section 2.4.3*)

8.1 Énoncé

1) Démontrer que le Jacobien d'un tel changement de variables est $-r^2\sin(\phi)$.

2) Retrouver le volume d'une boule de rayon R en appliquant la formule du Jacobien pour les intégrales triples.

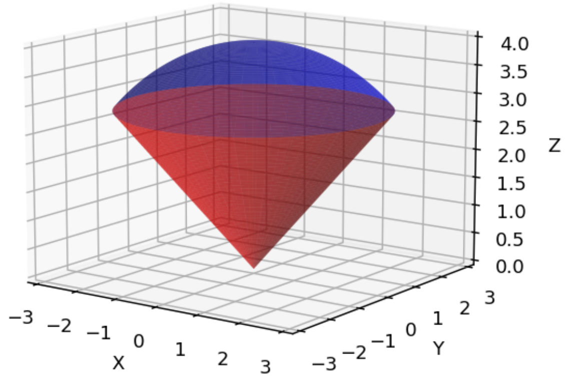
3) On considère un objet qui s'étend dans la région de l'espace représentée ci-contre. Il s'agit de la région délimité par la sphère de rayon d'équation (en coordonnées sphèriques) $r = 4\ m$ et du cône d'équation (en coordonnées sphèriques) $\phi = \frac{\pi}{4}$. La masse volumique ρ est également donnée dans les coordonnées sphériques :

$$\rho = \frac{12\ \frac{kg}{m^2}}{r}$$

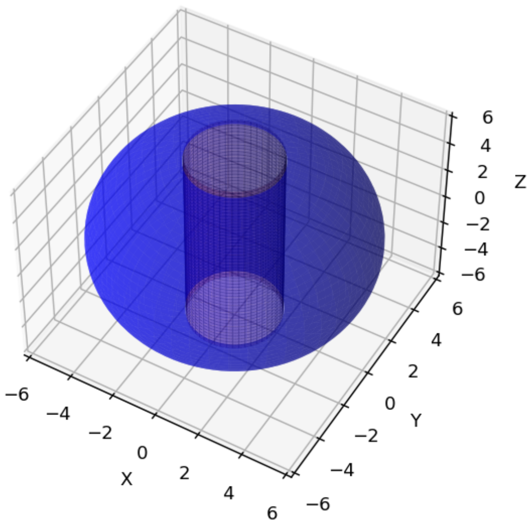
Calculer la masse de cet objet.

4) Une boule de rayon de 6 cm est percée d'un trou ayant un rayon de 2 cm. On obtient alors l'anneau sphérique ci-contre.
Calculer le volume de cet anneau sphérique.

Région délimitée par le cône $\phi = \frac{\pi}{4}$ et la sphère $r = 4$



Boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ trouée par le cylindre $x^2 + y^2 \leq 4$



8.2 Correction

1)

$$Jac\Psi(r,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_x}{\partial r}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_x}{\partial\phi}(r,\theta,\phi) \\ \frac{\partial\psi_y}{\partial r}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_y}{\partial\theta}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_y}{\partial\phi}(r,\theta,\phi) \\ \frac{\partial\psi_z}{\partial r}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta}(r,\theta,\phi) & \frac{\partial\psi_z}{\partial\phi}(r,\theta,\phi) \end{vmatrix} \quad \text{(On a noté } \Psi_x, \Psi_y \text{ et } \Psi_z \text{ les fonctions composantes de } \Psi.\text{)}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos(\theta)\sin(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cos(\theta)\sin(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\cos(\theta)\sin(\phi)\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\sin(\theta)\sin(\phi)\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\cos(\phi)\right) & \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r\cos(\phi)\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\sin(\phi) \end{vmatrix} \\
&= \cos(\phi).\begin{vmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} - r\sin(\phi).\begin{vmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) \end{vmatrix} \\
&= \cos(\phi).\left(-r\sin(\theta)\sin(\phi).r\sin(\theta)\cos(\phi) - r\cos(\theta)\sin(\phi).r\cos(\theta)\cos(\phi)\right) \\
&\qquad - r\sin(\phi).\left(\cos(\theta)\sin(\phi).r\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi).r\sin(\theta)\sin(\phi)\right) \\
&= \cos(\phi).\left(-r^2\cos(\phi)\sin(\phi)\sin^2(\theta) - r^2\cos(\phi)\sin(\phi)\cos^2(\theta)\right) - r\sin(\phi).\left(r\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + r\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)\right) \\
&= \cos(\phi).\left(-r^2\cos(\phi)\sin(\phi)\left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)\right) - r^2\sin^3(\phi).\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)
\end{aligned}$$

$$= -r^2\cos^2(\phi)\sin(\phi) - r^2\sin^3(\phi)$$
$$= -r^2\sin(\phi).\left(\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)\right)$$
$$= -r^2\sin(\phi)$$

2)

$$\iiint_{\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \ | \ x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}} 1dxdydz = \iiint_{[0;R]\times[0;2\pi]\times[0;\pi]} 1.\left|Jac\Psi(r,\theta,\phi)\right| drd\theta d\phi$$

⚠Ne pas oublier la valeur absolue!

$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left|-r^2\sin(\phi)\right|d\phi\right)d\theta\right)dr$$
$$= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}r^2\sin(\phi)\,d\phi\right)d\theta\right)dr$$
$$= \int_0^R r^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(\phi)\,d\phi\right)d\theta\right)dr$$
$$= \int_0^R r^2\left(\int_0^{2\pi}\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi}d\theta\right)dr$$
$$= \int_0^R r^2\left(\int_0^{2\pi}2d\theta\right)dr$$
$$= 2\int_0^R r^2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)dr$$
$$= 2\int_0^R r^2\left[\theta\right]_0^{2\pi}dr$$
$$= 2\int_0^R r^2 2\pi dr$$
$$= 4\pi\int_0^R r^2dr$$
$$= 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

3) ⚠Il faut penser à écrire la valeur absolue du Jacobien! En effet :

$$\text{masse de l'objet en } kg = \iiint_{\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in^3 \ | \ 0\leq r(x,y,z)\leq 4,\ 0\leq\phi(x,y,z)\leq\frac{\pi}{4}\right\}} \rho(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iiint_{\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in^3 \ | \ 0\leq r(x,y,z)\leq 4,\ 0\leq\phi(x,y,z)\leq\frac{\pi}{4}\right\}} \frac{12}{r(x,y,z)}dxdydz$$

⚠Ce « r » désigne la première composante de la réciproque du changement de variable sphérique.

$$= \iiint_{[0;4]\times[0;2\pi]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} \frac{12}{r\left(x(r,\theta,\phi),y(r,\theta,\phi),z(r,\theta,\phi)\right)}.\left|Jac\Psi(r,\theta,\phi)\right|drd\theta d\phi$$
$$= \iiint_{[0;4]\times[0;2\pi]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} \frac{12}{r}.\left|Jac\Psi(r,\theta,\phi)\right|drd\theta d\phi$$

⚠Ne pas oublier la valeur absolue!

$$= \int_0^4\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{12}{r}\left|-r^2\sin(\phi)\right|d\phi\right)d\theta\right)dr$$
$$= 12\int_0^4 r\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\phi)\,d\phi\right)d\theta\right)dr \qquad \left(\text{car } \forall\ \phi\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right],\ \sin(\phi)\geq 0\right)$$
$$= 12\int_0^4 r\left(\int_0^{2\pi}\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\right)dr$$
$$= 12\int_0^4 r\left(\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)d\theta\right)dr$$
$$= 12\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^4 r\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)dr$$

$$
\begin{aligned}
&= 12\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^4 r2\pi dr \\
&= 24\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi\int_0^4 r dr \\
&= 24\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^4 \\
&= 192\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi \\
&\approx 176,67
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
\text{Volume de l'anneau en } cm^3 &= \int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\int_{\frac{2}{\sin(\phi)}}^{6}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin(\phi)\,d\theta\right)dr\right)d\phi \qquad \text{(en faisant un peu de trigonométrie)} \\
&= 2\pi\int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\sin(\phi)\left(\int_{\frac{2}{\sin(\phi)}}^{6} r^2 dr\right)d\phi \\
&= 2\pi\int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\sin(\phi)\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{2}{\sin(\phi)}}^{6} d\phi \\
&= 2\pi\int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\sin(\phi)\left(72-\frac{8}{3\sin^3(\phi)}\right)d\phi \\
&= 144\pi\int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\sin(\phi)\,d\phi-\frac{16\pi}{3}\int_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{1}{\sin^2(\phi)}d\phi \\
&= 144\pi\left[-\cos(\phi)\right]_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{16\pi}{3}\left[-\cot(\phi)\right]_{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} \qquad \left(\text{où } \cot=\frac{\cos}{\sin}\right) \\
&= 144\pi\left(-\cos\left(\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)+\frac{16\pi}{3}\left(-\cot\left(\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\cot\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \\
&= 144\pi\left(\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)+\frac{16\pi}{3}\left(\cot\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\cot\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right) \\
&= 288\pi\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\frac{32\pi}{3}\cot\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= 288\pi\sqrt{1-\frac{1}{9}}+\frac{32\pi}{3}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} \\
&= 288\pi\sqrt{\frac{8}{9}}+32\pi\sqrt{\frac{8}{9}} \\
&= 320\pi\sqrt{\frac{8}{9}} \\
&= 320\pi\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

9 Calculer l'aire d'une surface non plane (*section 3.1.2*)

9.1 Énoncé

1) Calculer l'aire d'une sphère de rayon R.
2) Calculer l'aire de la surface de la partie du paraboloïde d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ qui est en dessous du plan d'équation $z = 4$ et au-dessus du plan d'équation $z = 1$.
Cette surface est paramétrée par :

$$\begin{array}{rccc} p: & [1;2]\times[0;2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

9.2 Correction

1)
2) Cette surface est paramétrée par :

$$\begin{array}{rccc} p: & [1;2]\times[0;2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ r^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc l'aire recherchée $\mathscr{A}$ est :

$$\mathscr{A} = \iint_{[1;2]\times[0;2\pi]} \left\| \frac{\partial p}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial p}{\partial \theta}(r,\theta) \right\| dr\,d\theta$$

Calculons :

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 2r \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial p}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\theta) \\ -2r^2\sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial p}{\partial \theta}(r,\theta) \right\| = \left(4r^4 + r^2\right)^{\frac{1}{2}} = r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}} d\theta\,dr \\
&= \int_1^2 \left[r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \theta \right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_1^2 r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}} 2\pi\,dr \\
&= 2\pi \int_1^2 r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dr \\
&= \frac{2\pi}{8} \int_1^2 8r\left(4r^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dr \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}\left(4r^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$