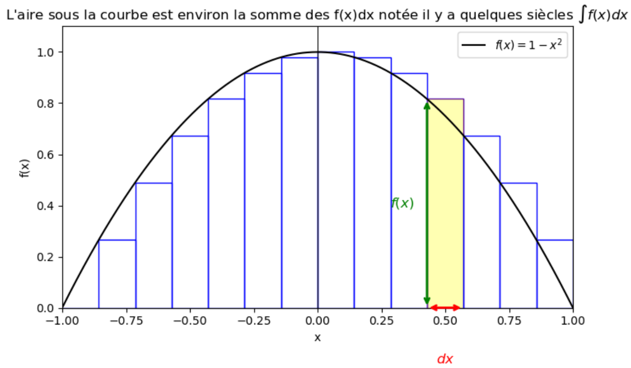
EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LE CALCUL INTÉGRAL

S. Labopin

Table des matières

1 Approximation d'aires par des rectangles et définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Un des objectifs de l'intégration est de calculer des aires.
Sur la figure ci-contre, la somme des aires des petits rectangles bleus approxime l'aire sous la courbe de la fonction $x \longmapsto 1-x^2$ (et au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$) .
Ces rectangles ont tous la même largeur dx.
Plus il y en a, meilleure est l'approximation. On imagine alors dx infinitésimal (i.e. « très très petit ») .
Ils ont tous la même largeur mais ils n'ont pas tous la même hauteur. Par exemple, le rectangle dont le coin en bas à gauche est $(x, 0)$ a pour hauteur $f(x)$.
Si il y a n rectangles (penser n « très très grand » pour que dx soit « très très petit ») , alors leur largeur est $\frac{\text{longueur de }[-1;1]}{n}=\frac{2}{n}$ et ils subdivisent le segment $[-1;1]$ en n petits segments d'extrêmités :



$$\mathbf{-1};\quad -1+1\times\frac{2}{n};\quad -1+2\times\frac{2}{n};\quad -1+3\times\frac{2}{n};\quad \cdots\quad -1+(n-2)\times\frac{2}{n};\quad -1+(n-1)\times\frac{2}{n};\quad -1+n\times\frac{2}{n}=\mathbf{1}$$

Et leurs hauteurs sont donc :

$$f(-1);\quad f\left(-1+1\times\frac{2}{n}\right);\quad f\left(-1+2\times\frac{2}{n}\right);\quad f\left(-1+3\times\frac{2}{n}\right);\quad \cdots\quad f\left(-1+(n-2)\times\frac{2}{n}\right);\quad f\left(-1+(n-1)\times\frac{2}{n}\right)$$

Si f est continue (comme c'est le cas ici pour $f: x \longmapsto 1-x^2$) , alors cette somme d'aires de rectangle se rapproche de l'aire sous la courbe quand n se rapproche de $+\infty$.
Autrement dit :

Aire sous la courbe = Somme des aires des petits rectangles quand ils sont de largeur infinitésimale dx

$$=\underbrace{\lim_{n\to+\infty}}_{\text{Quand } n \text{ se rapproche de } +\infty,\ dx=\frac{2}{n} \text{ se rapproche de } 0.}\quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}_{\displaystyle\int}\quad \underbrace{f\left(-1+k.\frac{2}{n}\right)}_{\displaystyle f(x)}\underbrace{\frac{2}{n}}_{\displaystyle dx}$$

Ce symbole est un **S** « allongé » comme le **S** de **S**omme

La notation $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ désigne l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$. On peut la penser comme une somme infinie de contributions infinitésimales $f(x)\,dx$.

Par exemple, pour $f: x \longmapsto 1-x^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^2\right)\times\frac{2}{n}\\ &=\frac{2}{n}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\\ &=\frac{8}{n^3}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}k(n-k)\end{aligned}$$

En prenant $n=1000$, on obtient l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx &\approx \frac{8}{1\,000\,000\,000}\sum_{k=0}^{999}k(n-k)\\ &\approx \frac{8}{1\,000\,000\,000}(0\times1000+1\times999+2\times998+3\times997+\ldots+997\times3+998\times2+999\times1)\end{aligned}$$

Via *Pyhton*, on a calculé ci-contre :

```
# Calcul de la somme de produits
somme_produits = sum(i * (1000 - i) for i in range(1000))

# Multiplication par la fraction
resultat = (8 / 1000000000) * somme_produits

print(resultat)
```

```
1.3333320000000002
```

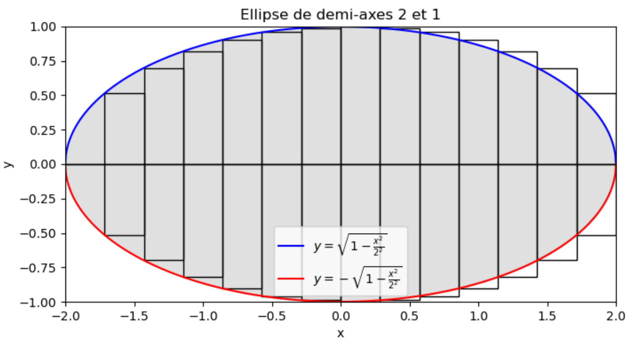
- $\frac{8}{1\,000\,000\,000}\,(0\times1\,000+1\times999+2\times998+3\times997+\ldots+997\times3+998\times2+999\times1)$
  On obtient : 1,333 332 000 000 000 2

```
from scipy.integrate import quad

# Définir la fonction à intégrer
def f(x):
    return 1 - x**2

# Calculer l'intégrale
resultat, erreur = quad(f, -1, 1)

print("L'intégrale est :", resultat)
print("Erreur estimée :", erreur)
```

```
L'intégrale est : 1.3333333333333335
Erreur estimée : 1.4802973661668755e-14
```

- L'aire $\int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx$ (via le module `scipy.integrate` de *Python*)
  On obtient : 1,333 333 333 333 333 5
  ⚠La valeur proposée pour cette intégrale par le module `scipy.integrate` est aussi une approximation dont l'erreur est : $1{,}480\,297\,366\,166\,875\,5.10^{-14}$

On note $\mathscr{A}$ l'aire de l'ellipse ci-contre.
En utilisant le même procédé, démontrer que :



$$\mathscr{A}\approx\frac{8}{1\,000^2}\sum_{k=0}^{999}\sqrt{n^2-k^2}$$

$$\approx\frac{8}{1\,000^2}\left(\sqrt{1000^2-0^2}+\sqrt{1000^2-1^2}+\sqrt{1000^2-2^2}\ldots+\sqrt{1000^2-997^2}+\sqrt{1000^2-998^2}+\sqrt{1000^2-999^2}\right)$$

$$\approx 2\times3{,}143\,555\,466\,911\,019\,7$$

$$\approx 6{,}287\,110\,933\,822\,039\,4$$

Commentaire : Vous avez peut-être reconnu une approximation du nombre π. On démontrera en effet plus tard grâce au théorème de changement de variable que :

$$2\int_{-2}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=2\pi$$

Nous venons en fait d'appliquer à deux reprises le théorème suivant :

Théorème des sommes de Riemann
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\int_a^b f(x)\,dx$$

En fait, en mathématique, la notion d'aire est définie via la notion d'intégrale de fonction sur un segment et la notion d'intégrale de fonction sur un segment ne concerne pas que les fonctions continues.

Pour simplifier, nous ne considererons dans ce cours que des intégrales de fonction continue et nous appréhenderons le théorème précédent comme une définition :

Définitions
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors :

i) On appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ le nombre noté $\int_a^b f(x)\,dx$ suivant :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$$

ii) Si f est de plus positive (ie $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geq0$), on appelle aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ (défini au point précédent).

2 Utilisation de la dérivation pour calculer une intégrale

Nous n'utiliserons en fait que très rarement la méthode de la section précédente pour calculer des intégrales.

En effet, si F est tel que $F' = f$, on a simplement :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ainsi, pour calculer la première intégrale de la section précédente, on aurait pu écrire simplement :

$$\left(x - \frac{x^3}{3}\right)' = 1 - x^2 \text{ donc } \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = F(1) - F(-1) \qquad \text{(en notant } F(x) = x - \frac{x^3}{3}\text{)}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \\ &\approx 1{,}333\,333\,333\,333\,333\,3 \end{aligned}$$

On utilise en fait le théorème suivant :

Théorème fondamental de l'analyse **À savoir par cœur**
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On note :

$$G : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(x)\,dx \end{array}$$

Alors :

i) $G' = f$

ii) Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $F' = f$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- Si f et F sont deux fonctions telles que $F' = f$, on dit que F est une primitive de f.
- Comme f est évidemment une primitive de f', on a $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

1) Rappeler les primitives des fonctions suivantes :
   a) $x \mapsto \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
   b) $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   c) $x \mapsto \frac{1}{x}$
   d) $x \mapsto \ln(x)$
   e) $x \mapsto e^x$
   f) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
   g) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2) En déduire :
   a) $\int_2^4 3\,dx$
   b) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
   c) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$
   d) $\int_1^e \ln(x)\,dx$
   e) $\int_0^1 e^x\,dx$
   f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$
   g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
3) a) Déterminer les primitives de $x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{1}{1+x^2}$.
   b) Calculer $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{x} - \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

3 Reconnaître la dérivée d'une composée pour calculer une intégrale

Théorème de dérivation d'une composée
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$, $u : I \to J$ deux fonctions dérivables.
Alors $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et :

$$\forall x \in I,\ \left(f(u(x))\right)' = u'(x) f'(u(x))$$

Exemple :

- Pour $f(x) = \sin(x)$, on retrouve la formule $(\sin(u(x)))' = u'(x)\cos(u(x))$.
- Pour $f(x) = \sin(x)$ et $u(x) = x^2$, on obtient : $\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = 2x\cos\left(x^2\right)$
  On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos\left(x^2\right) dx &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{2} \times 2x\cos\left(x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x\cos\left(x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} u'(x)\cos(u(x))\, dx && \text{(en notant } u(x) = x^2\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} u'(x) f'(u(x))\, dx && \text{(en notant } u(x) = x^2 \text{ et } f(x) = \sin(x)\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(f(u(x))\right)' dx && \text{(en appliquant la formule de dérivation d'une composée)} \\
&= f\left(u\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right) - f(u(0)) \\
&= \sin\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right) - \sin\left(0^2\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto e^{4x}$
b) $x \mapsto e^{4x+3}$
c) $x \mapsto \sin(2x)$
d) $x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
e) $x \mapsto (2x+1)^2$
f) $x \mapsto \frac{3}{\sqrt{5x+1}}$
g) $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$
h) $x \mapsto \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$
i) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
j) $x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$
k) $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$
l) $x \mapsto 3x\sqrt{1+x^2}$

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{1} e^{4x} dx$
b) $\int_{-1}^{1} e^{4x+3} dx$
c) $\int_{0}^{2\pi} \sin(2x)\, dx$
d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) dx$
e) $\int_{-1}^{0} (2x+1)^2 dx$
f) $\int_{0}^{1} \frac{3}{\sqrt{5x+1}} dx$
g) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx$
h) $\int_{-1}^{1} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} dx$
i) $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} dx$
j) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^2(x)\, dx$
k) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} dx$
l) $\int_{0}^{1} 3x\sqrt{1+x^2} dx$

4 Intégration par parties

On aurait pu titrer cette section par « Reconnaître la dérivée d'un produit pour calculer une intégrale ».
En effet, à partir de la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad (uv \text{ est une primitive de } u'v + uv')$$

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$$

$$\int_a^b u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$$

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$$

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Théorème d'intégration par parties **À savoir par cœur**
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $u : [a, b] \to \mathbb{R}, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\ln(x)dx &= \int_1^2 u(x)\,v'(x)\,dx && (\text{avec } u(x) = \ln(x) \text{ et } v'(x) = x)\\
&= \int_1^2 u(x)\,v'(x)\,dx && \left(\text{avec } u(x) = \ln(x),\ u'(x) = \frac{1}{x},\ v(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = x\right)\\
&= u(2)\,v(2) - u(1)\,v(1) - \int_1^2 u'(x)\,v(x)\,dx && \left(\text{avec } u(x) = \ln(x),\ u'(x) = \frac{1}{x},\ v(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = x\right)\\
&= \ln(2)\frac{2^2}{2} - \ln(1)\frac{1^2}{2} - \int_1^2 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx\\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx\\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx\\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)\\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

1) Calculer les intégrales suivantes :
   a) $\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$
   b) $\int_0^1 \arctan(x)dx$
   c) $\int_0^1 \ln(1 + x^2)dx$
   d) $\int_1^2 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$

2) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
   a) $x \mapsto xe^x$
   b) $x \mapsto (\ln(x))^2$
   c) $x \mapsto \sin(\ln(x))$

3) a) Calculer la dérivée de f définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$$
   b) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies par :
   $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad f_2(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

5 Changement de variable

Remarque
Dans la notation « $\int_a^b f(x)\,dx$ » le « x » n'est pas utile. Par exemple, on aurait pu noter à la place « $\int_a^b f(t)\,dt$ » ou « $\int_a^b f(u)\,du$ ». Et on trouve même dans certains ouvrages « $\int_a^b f$ ».
On ne peut toutefois pas utiliser cette dernière façon d'écrire l'intégrale quand la fonction à intégrer n'a pas de nom. Il faut préciser par rapport à quelle variable on intègre. Par exemple, si on intègre la fonction $x \mapsto x^2 y$ sur le segment $[0;1]$, il faut préciser « dx ». En effet, les nombres $\int_0^1 x^2 y dx$ et $\int_0^1 x^2 y dy$ sont différents :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 y dx &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3}y\right)dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3}y\right)_{|x=1} - \left(\frac{x^3}{3}y\right)_{|x=0} \\ &= \frac{y}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 y dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\frac{y^2}{2}\right)dy \\ &= \left(x^2\frac{y^2}{2}\right)_{|y=1} - \left(x^2\frac{y^2}{2}\right)_{|y=0} \\ &= \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

On aurait encore pu titrer cette section par « Reconnaître la dérivée d'une composée pour calculer une intégrale ».
En effet, à partir de la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) && \text{(en notant } F \text{ une primitive de } f\text{)} \\ &= F\left(u\left(\beta\right)\right) - F(u(\alpha)) && \text{(avec } u \text{ une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ telle que } u(\alpha) = a \text{ et } u\left(\beta\right) = b\text{)} \\ &= \int_\alpha^\beta (F(u(x)))'\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta F'(u(x))\,u'(x)\,dx && \text{(d'après la formule de dérivation d'une composée)} \\ &= \int_\alpha^\beta \underbrace{f(u(x))}_{\text{« } f(u) \text{ »}}\ \underbrace{u'(x)\,dx}_{\text{« } \frac{du}{dx}dx = du \text{ »}}\end{aligned}$$

Les notations entre guillemets dans le calcul précédent suggèrent de penser comme suit pour retrouver la formule précédente plus intuitivement :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(u)\,du && \text{(voir remarque précédente)} \\ &= \int_{u=a}^{u=b} f(u)\,du && \left(\text{on va bientôt penser } u \text{ comme une fonction de la variable } x \text{ telle que } \begin{cases} u(\alpha) = a \\ u\left(\beta\right) = b \end{cases}\right) \\ &= \int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(u(x))\,du(x) && \left(\text{à partir de maintenant } u \text{ désigne une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ telle que } \begin{cases} u(\alpha) = a \\ u\left(\beta\right) = b \end{cases}\right) \\ &= \int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(u(x))\,\frac{du(x)}{dx}\,dx \\ &= \int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(u(x))\,u'(x)\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta f(u(x))\,u'(x)\,dx\end{aligned}$$

Théorème de changement de variable **À savoir par cœur**
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $u : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(x))\,u'(x)\,dx$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \cos\left(\sqrt{x}\right)dx &= \int_{u(0)}^{u(\pi)} \cos\left(\sqrt{x}\right)dx && \text{(en notant } u : x \mapsto x^2\text{)}\\
&= \int_0^\pi \cos\left(\sqrt{u(x)}\right)u'(x)\,dx && \text{(d'après le théorème de changement de variable)}\\
&= \int_0^\pi \cos\left(\sqrt{x^2}\right)2x\,dx\\
&= 2\int_0^\pi x\cos(|x|)\,dx\\
&= 2\int_0^\pi x\cos(x)\,dx && \text{(car } \cos(x) = \cos(-x)\text{)}\\
&= 2\left((x\sin(x))_{|x=\pi} - (x\sin(x))_{|x=0} - \int_0^\pi \sin(x)\,dx\right) && \text{(par intégration par parties)}\\
&= 2\left(0 - 0 - \left((-\cos(x))_{|x=\pi} - (-\cos(x))_{|x=0}\right)\right)\\
&= 2(-1-1)\\
&= -4
\end{aligned}$$

Le même exemple rédigé moins rigoureusement mais avec davantage d'intuition :

On effectue le changement de variable $x = t^2$:

- On cherche les nouvelles bornes d'intégration :

$$\begin{cases} \text{Quand } t \text{ vaut } 0,\ x \text{ vaut } 0\\ \text{Quand } t \text{ vaut } \pi,\ x \text{ vaut } \pi^2 \end{cases}$$

  On écrira alors 0 et π à la place de 0 et π^2 pour les nouvelles bornes.
- On écrit dx en fonction de dt :

$$\begin{aligned}
x &= t^2\\
\frac{dx}{dt} &= 2t && \text{(penser } x(t) = t^2 \text{ et } x'(t) = 2t\text{)}\\
dx &= 2t\,dt
\end{aligned}$$

  On écrira alors $2t\,dt$ à la place de dx.
- On écrit $\cos\left(\sqrt{x}\right)$ en fonction de t :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\sqrt{x}\right) &= \cos\left(\sqrt{t^2}\right)\\
&= \cos(|t|)\\
&= \cos(t) && \text{(car } \cos(t) = \cos(-t)\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \cos\left(\sqrt{x}\right)dx &= \int_0^\pi \cos(t)\,2t\,dt\\
&= \ldots && \text{(on continue avec la 5}^{\text{ème}}\text{ ligne du calcul précédent)}
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu rédiger ce calcul en commençant par écrire « $t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx$, $2t\,dt = dx$,... ».

1) Via le changement de variable $u = e^x$, calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

2) Via le changement de variable $u = e^x$, calculer :

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

3) Via le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

4) Calculer l'aire de l'ellipse mentionnée dans la première section.

5) Via le changement de variable $y = \frac{\pi}{4} - x$, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx$$

6) Via le changement de variable $u = \cos(x)$, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos(x))\tan(x)\,dx$$

7) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

   a) $x \longmapsto \frac{dx}{9x^2+9x+2}$
   b) $x \longmapsto \frac{dx}{4x^2+4x+1}$
   c) $x \longmapsto \frac{dx}{3x^2+x+1}$
   d) $x \longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$
   e) $x \longmapsto \frac{1}{x^2+4}$
   f) $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$

6 Application à l'étude métrique des courbes

Dans toute cette section :

- a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
- A et B sont deux points de $\mathbb{R}^3$.
- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : $\begin{cases} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \\ \forall t \in [a, b], \ \gamma'(t) \neq 0 \end{cases}$
- $\mathscr{C}$ est l'image $\gamma([a, b])$ de la courbe paramétrée γ, i.e. l'ensemble des $\gamma(t)$ quand t parcourt $[a, b]$.

6.1 Longueur d'une courbe

Comme dans la section 1, on subdivise le segment sur lequel la courbe paramétrée γ est définie en n segments de longueur $\frac{b-a}{n}$ et donc d'extrêmités :

$$a_0 = a; \quad a_1 = a + 1 \times \frac{b-a}{n}; \quad a_2 = a + 2 \times \frac{b-a}{n}; \quad \bullet\bullet\bullet \quad a_{n-1} = a + (n-1) \times \frac{b-a}{n}; \quad a + n \times \frac{b-a}{n} = a_n = b$$

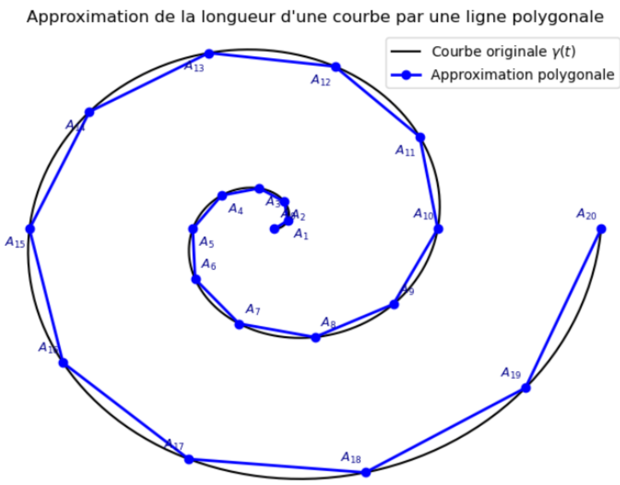
On note leurs images par γ comme suit :

$$A = \gamma(a_0); \quad A_1 = \gamma(a_1); \quad A_2 = \gamma(a_2); \quad \bullet\bullet\bullet \quad A_{n-1} = \gamma(a_{n-1}); \quad A_n = \gamma(a_n) = B$$

Toujours un peu comme dans la section 1, on approche la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ avec une somme de longueurs de segment :

$$\begin{aligned}
\text{Longueur de } \mathscr{C} &\approx A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\right|\right| \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} ||A_{k+1} - A_k|| \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} ||\gamma(a_{k+1}) - \gamma(a_k)|| \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} ||\gamma'(a_k)||.|a_{k+1} - a_k| \\
&\approx \sum_{k=0}^{n-1} ||\gamma'(a_k)||.\frac{b-a}{n} \\
&\approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ||\gamma'(a_k)|| \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt
\end{aligned}$$

(d'après le théorème des sommes de Riemann rappelé en section 1)



Il est donc naturel de choisir de définir la longueur d'une courbe comme suit :

Définition (longueur d'une courbe)

À savoir par cœur

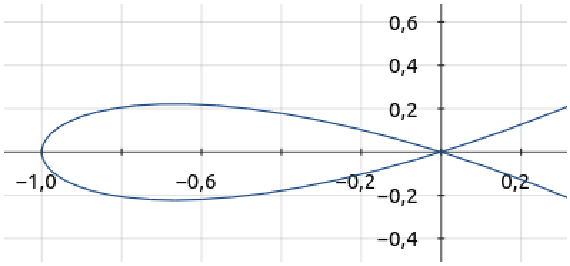
On appelle longueur de la courbe $\mathscr{C}$ le nombre suivant :

$$(\text{Longueur de } \mathscr{C}) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$$

Exercice :

On souhaite calculer la longueur de la boucle de la courbe paramétrée dont les fonctions coordonnées et l'image sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



1) Déterminer $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} x(s) = x(t) \\ y(s) = y(t) \\ s \neq t \end{cases}$

2) En déduire la longueur de la boucle.

6.2 Abscisse curviligne d'une courbe

On peut imaginer que $\gamma(t)$ est la position d'une particule à l'instant t. Quand t varie de a à b, $\gamma(t)$ décrit la trajectoire de la particule. Cette trajectoire est alors la courbe $\mathscr{C}$ et γ est un paramétrage de la courbe $\mathscr{C}$.

$\gamma'(t)$ est la vitesse de la particule à l'instant t. On aimerait trouver un paramétrage $s : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ qui décrirait la même trajectoire mais en parcourant une unité de longueur par unité de temps, ie tel que $\forall t \in [c,d]\,,\ \left|\left|s'(t)\right|\right| = 1$.

On s'interresse donc naturellement à la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\phi : [a,b] &\to \mathbb{R}\\ t &\mapsto \text{(longueur de courbe parcourue par la particule à l'instant } t) = \int_a^t \left|\left|\gamma'(u)\right|\right| du\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall t \in [a,b]\,,\ \phi'(t) = \left|\left|\gamma'(t)\right|\right|$$

Comme γ' est continue (car γ est de classe $\mathscr{C}^1$), alors ϕ' est aussi continue et ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$.
Comme $\forall s \in [a,b]\,,\ \gamma'(s) \neq 0$, alors $\forall s \in [a,b]\,,\ \phi'(s) > 0$ et donc ϕ est strictement croissante.
Donc, d'après le théorème de la bijection et le théorème concernant la dérivée de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable de dérivée ne s'annulant pas, on a :

$$\phi \text{ est une bijection de } [a,b] \text{ vers } [c,d] \text{ en notant } c = \phi(a) \text{ et } d = \phi(b)$$

Et :

$$\forall t \in [c,d]\,,\ \left(\phi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\phi'\left(\phi^{-1}(t)\right)} = \frac{1}{\left|\left|\gamma'(\phi^{-1}(t))\right|\right|} \tag{1}$$

On note :

$$s = \gamma \circ \phi^{-1}$$

Alors $s : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de $\mathscr{C}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in [c,d]\,,\ s'(t) &= \left(\gamma \circ \phi^{-1}\right)'(t)\\ &= \gamma'\left(\phi^{-1}(t)\right).\left(\phi^{-1}\right)'(t) && \text{(d'après la formule de dérivation d'une composée)}\\ &= \gamma'\left(\phi^{-1}(t)\right).\frac{1}{\left|\left|\gamma'(\phi^{-1}(t))\right|\right|} && \text{(via (1))}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall t \in [c,d]\,,\ \left|\left|s'(t)\right|\right| &= \left|\left|\gamma'\left(\phi^{-1}(t)\right).\frac{1}{\left|\left|\gamma'(\phi^{-1}(t))\right|\right|}\right|\right|\\ &= \left|\left|\gamma'\left(\phi^{-1}(t)\right)\right|\right|.\frac{1}{\left|\left|\gamma'(\phi^{-1}(t))\right|\right|}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, si $s(t)$ est la position d'une particule à l'instant t, alors cette particule décrit la courbe $\mathscr{C}$ quand t varie de c à d et en parcourant une unité de longueur par unité de temps.

Définition (Abscisse curviligne d'une courbe).
On appelle abscisse curviligne de la courbe $\mathscr{C}$ une paramétrisation $\gamma : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ de cette courbe telle que :

$$\forall t \in [c,d]\,,\ \left|\left|s'(t)\right|\right| = 1$$

7 Intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Dans toute cette section :

- D est une partie de $\mathbb{R}^3$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$ (défini sur D).
- a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.
- A et B sont deux points de D.
- $\gamma : [a, b] \to D$ est une courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux telle que : $\begin{cases} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \\ \gamma' \text{ ne s'annule pas.} \end{cases}$
- $\mathscr{C}$ est l'image $\gamma([a, b])$ de la courbe paramétrée γ, i.e. l'ensemble des $\gamma(t)$ quand t parcourt $[a, b]$.

7.1 Préliminaire : Dériver la composée d'un champ scalaire et d'une courbe paramétrée

Remarque : La composée $f \circ \gamma$ est une fonction à une seule variable et dérivable. L'expression $\left(f \circ \gamma\right)'$ a donc un sens.

Règle de la chaîne première version (ou formule de dérivation de la composée d'un champ scalaire et d'une courbe paramétrée) **À savoir par cœur**

$$\forall t \in [a, b], \ \left(f \circ \gamma\right)'(t) = \overrightarrow{\nabla} f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On note :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\left(2+2t, t^2\right) \end{array}$$

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2) On suppose que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x^2 + y^3 \end{array}$$

   a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $g'(t)$ en utilisant la première version de la règle de la chaîne.
   b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $g'(t)$ sans utiliser la première version de la règle de la chaîne.

7.2 Généralisation du théorème fondamental de l'analyse aux fonctions à plusieurs variables

D'après le théorème fondamental de l'analyse rappelé dans la section 2 :

$$\text{Si } g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ alors } \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

On peut alors obtenir une généralisation pour les fonctions de plusieurs variables avec le calcul suivant :

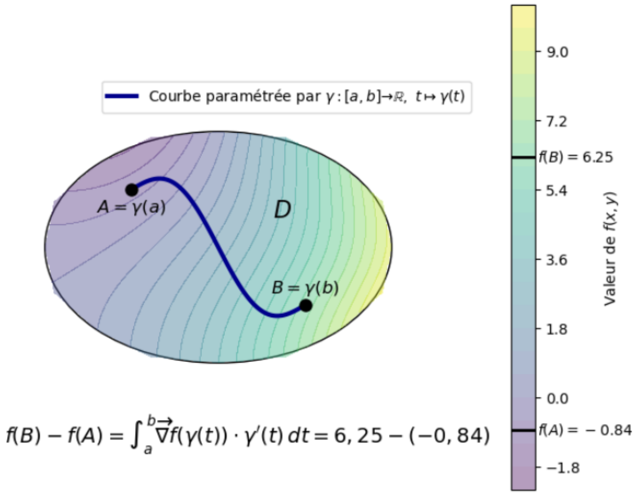
$$\begin{aligned} f(B) - f(A) &= f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right) \\ &= \left(f \circ \gamma\right)(b) - \left(f \circ \gamma\right)(a) \\ &= \int_a^b \left(f \circ \gamma\right)'(t)\, dt && \text{(d'après le théorème fondamental de l'analyse)} \\ &= \int_a^b \overrightarrow{\nabla} f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt && \text{(d'après la règle de la chaîne)} \end{aligned}$$

7.3 Le théorème du gradient

Théorème du gradient (ou théorème fondamental du calcul pour les champs de vecteurs)

À savoir par cœur

$$f(B) - f(A) = \int_a^b \overrightarrow{\nabla} f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt$$



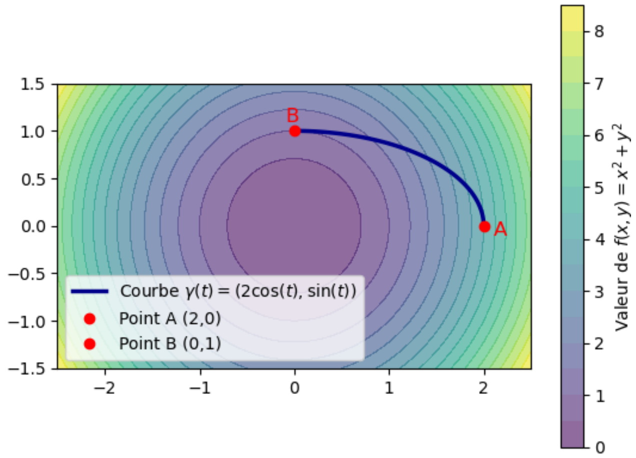
Exercice-Exemple (Illustration du théorème du gradient)
On considère le cas particulier :

$$D = \mathbb{R}^2 \qquad f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \gamma: \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & D \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (2\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

En calculant séparément $f(B) - f(A)$ et $\int_a^b \overrightarrow{\nabla} f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt$, vérifier que l'on a bien dans ce cas l'égalité suivante (que l'application du théorème du gradient fournirait) :

$$f(B) - f(A) = \int_a^b \overrightarrow{\nabla} f\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt$$



7.4 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

Dans cette section, $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3$ désigne un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$.

7.4.1 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe).

À savoir par cœur

On note $\int_\gamma \overrightarrow{V}\, d\gamma$ et on appelle circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par γ le nombre suivant :

$$\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma = \int_a^b \overrightarrow{V}\left(\gamma(t)\right) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

7.4.2 Indépendance de la circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe par rapport à la paramétrisation de cette courbe

La notation « $d\gamma$ » n'est pas utile mais il est conventionnel de la préciser. En effet, si $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ est une autre paramétrisation de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathscr{C}$ telle que $\begin{cases} \gamma_2(a) = A \\ \gamma_2(b) = B \\ \gamma_2' \text{ ne s'annule pas.} \end{cases}$, alors on a :

$$\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma_2$$

7.4.3 Indépendance de la circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel par rapport au chemin

D'après le théorème du gradient, si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel, alors sa circulation $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma$ le long de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par γ n'est pas seulement indépendante du paramétrage γ de cette courbe $\mathscr{C}$, elle est indépendante de la courbe $\mathscr{C}$ elle-même, i.e. $\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma$ ne dépend que de l'origine A et de la destination B du chemin d'intégration.
Autrement dit, si $\mathscr{C}_2$ est une autre courbe orientée de A vers B et $\gamma_2 : [c,d] \to D$ un paramétrage de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux de la courbe $\mathscr{C}_2$ tel que $\begin{cases} \gamma_2(a) = A \\ \gamma_2(b) = B \\ \gamma_2' \text{ ne s'annule pas.} \end{cases}$, alors :

$$\oint_{\mathscr{C}_2} \overrightarrow{V}\, d\gamma_2 = \oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma$$

Ainsi, si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel, on peut noter sa circulation le long d'une courbe de A jusqu'à B de la façon suivante :

$$\int_A^B \overrightarrow{V}$$

Exercice :
On note :

$$\overrightarrow{V} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 4x^3y^2 \\ 2x^4y + y \end{pmatrix} \end{array} \qquad \gamma : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathscr{C} = \left\{ \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

1) En utilisant le cours sur le rotationnel, démontrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel.
2) En déduire que :

$$\oint_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V}\, d\gamma = 0$$

7.4.4 Travail d'une force (ou plutôt d'un champ de forces)

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de forces, alors on peut parler du travail $W_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{F}\right)$ effectué par ce champ de forces lors du déplacement d'une particule le long d'une courbe $\mathscr{C}$. Ce travail est donné par l'intégrale curviligne du champ de vecteurs, c'est-à-dire :

$$W = \int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V} \cdot d\gamma = \int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), dt$$

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de forces dérivant d'un potentiel (comme par exemple le champ électrique induit par des charges statiques (puisque dans ce cas $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0$)), alors on peut parler du travail $W_{A\to B}\left(\overrightarrow{V}\right)$ effectué par ce champ de forces lors du déplacement d'une particule du point A jusqu'au point B :

$$W_{A\to B}\left(\overrightarrow{V}\right) = \int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{V} \cdot d\gamma \qquad \text{où } \gamma : [a,b] \to D \text{ est une courbe paramétrée de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux telle que : } \begin{cases} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \\ \gamma' \text{ ne s'annule pas.} \end{cases}$$