EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LES OPÉRATEURS VECTORIELS

S. Labopin

Table des matières

1 Déterminer les outils mathématiques nécessaires pour comprendre l'ETS 16

Regarder la page de présentation de l'ETS 16.

1) À votre avis, quels sont les outils mathématiques que l'on doit maîtriser pour comprendre les notions présentées ?
2) Considérons la première équation donnée dite « équation de continuité » :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \overrightarrow{V}\right) = 0$$

   a) Que signifie ρ ? Est-ce un vecteur ? Est-ce un nombre réel ? Sinon de quoi s'agit-il ? Si vous ne voyez pas, lisez la définition et l'exemple de la section suivante.
   b) Que signifie $\overrightarrow{V}$? Est-ce un vecteur ? Est-ce un nombre réel ? Si vous ne voyez pas, lisez la définition et l'exemple de la section suivante.
   c) Que signifie $\frac{\partial}{\partial t}$?

2 Reconnaître des champs scalaires et des champs de vecteurs

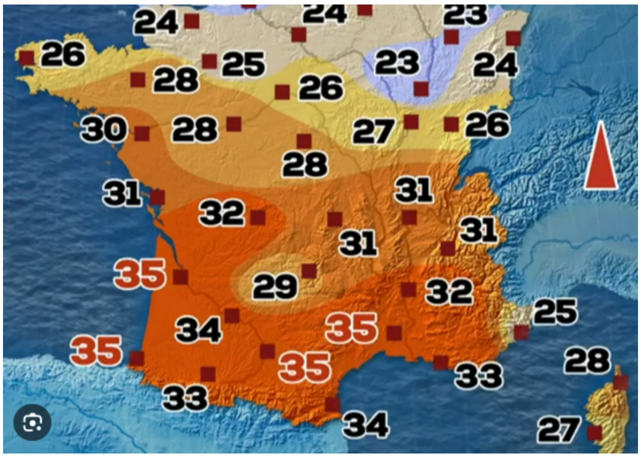
Définition (Champ scalaire et champ vectoriel).
Lorsqu'à chaque point d'une partie de l'espace on associe un nombre réel, on parle de champ scalaire.
Lorsqu'à chaque point d'une partie de l'espace on associe un vecteur, on parle de champ de vecteurs.

Exemple (Champ scalaire et champ vectoriel).
$f\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2$ est un champ scalaire.
$\overrightarrow{V}\left(x, y, z\right) = x^2 y \overrightarrow{i} + y^2 \overrightarrow{j} + z^2 \overrightarrow{k}$ est un champ vectoriel.

1) Pour chacune des notions de physique suivantes, dire si on la représente avec un champ scalaire ou un champ de vecteurs :
   a) La température.
   b) La force électrique.
   c) La force magnétique.
   d) Le champ de vitesses d'un fluide.
   e) La pression atmosphérique.
   f) La masse volumique d'un fluide.
2) A-t-on déjà rencontré certaines de ces notions dans l'équation de continuité rappelée dans la section précédente ?

3 Champs scalaires et champs de vecteurs définis sur une partie du plan ou une partie de la droite

Lorsque l'on étudie des objets très aplatis ou très allongés, on ne tient plus compte des trois dimensions de l'espace physique.
C'est pourquoi on parle encore de champ de scalaires ou de champ de vecteurs lorsque l'on associe à chaque point d'une partie du plan respectivement un nombre réel ou un vecteur.
Par exemple, quand on regarde la météo, on ne s'interesse qu'à la température au sol. On associe alors à chaque lieu sur Terre sa température. Autrement dit, on associe à chaque point $\left(x, y\right)$ du plan le nombre réel $T\left(x, y\right)$ qui représente la température au lieu sur Terre repéré par ce point.
Comme écrire un nombre en chaque point du plan serait illisible en plus d'être impossible, on utilise un code couleur pour rendre compte de la température en tous les points du plan et non pas seulement dans certaines villes.



Chercher en physique un exemple de champ scalaire défini sur une partie de la droite (i.e. « ne prenant qu'une variable x »).

4 Représentation graphique des champs scalaires et des champs de vecteurs définis sur une partie du plan ou une partie de la droite

4.1 Une dimension

1) Qu'a-t-on dessiné via le programme *Python* ci-contre?
2) L'équation de la chaleur en une dimension spatiale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où

- $u = u(x,t)$ représente la température en un point x à un instant t.
- α est le coefficient de diffusivité thermique du matériau, mesurant la capacité du matériau à conduire la chaleur.

On considère une tige métallique de diffusivité thermique égale à $\frac{1}{100}$ représentée par le segment $[-1;1]$.
À l'instant initial $t = 0$, la température le long de la tige est donnée par :

$$u(x,0) = \cos(\pi x)$$

La tige est isolée aux deux extrémités, ce qui signifie que le flux de chaleur à travers les extrémités est nul. Mathématiquement, cela se traduit par les deux relations suivantes dites « conditions aux limites de Neumann » :

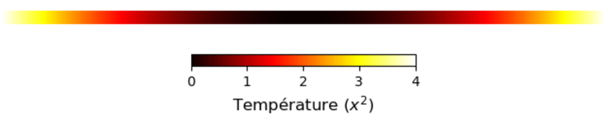
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la température de la tige au point x et à l'instant t est donnée par :

$$u(x,t) = e^{\frac{-\pi^2 t}{100}} \cos(\pi x)$$

b) Écrire un programme *Python* pour dessiner ce champ scalaire qu'est la température de la tige à l'instant $t = 1$.
c) Comment dessiner ce champ scalaire plus simplement et sans utiliser de couleur? Compléter le programme *Python* précédent pour obtenir ce graphique.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.collections import LineCollection

# Définir la fonction qui calcule la température en fonction de x
def temperature(x):
    return x**2

# Générer les points x entre -2 et 2
x = np.linspace(-2, 2, 500)
y = np.zeros_like(x)  # y est constant car nous ne voulons pas de courbe

# Calculer les valeurs de température pour ces points
temp = temperature(x)

# Créer des segments pour chaque paire de points
points = np.array([x, y]).T.reshape(-1, 1, 2)
segments = np.concatenate([points[:-1], points[1:]], axis=1)

# Créer une LineCollection, coloration selon la température
lc = LineCollection(segments, cmap='hot', norm=plt.Normalize(0, temp.max()))
lc.set_array(temp)
lc.set_linewidth(10)  # Ajustez la largeur de la ligne selon le besoin

# Création de la figure et de l'axe
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 1))  # Taille adaptée pour un segment
ax.add_collection(lc)
ax.set_xlim(x.min(), x.max())
ax.set_ylim(-0.1, 0.1)  # Axe y minimisé car non utilisé

# Cacher les axes et les ticks
ax.axis('off')

# Ajouter une barre de couleur pour indiquer l'échelle de température
cbar = plt.colorbar(lc, ax=ax, orientation='horizontal', label='Température ($x^2$)')
cbar.set_label('Température ($x^2$)', size=12)

# Afficher le graphique
plt.show()
```

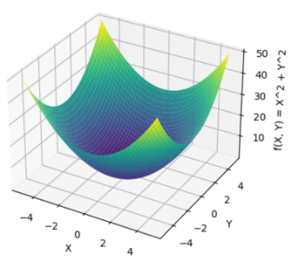


4.2 Deux dimensions

Exemple (Représentation graphique d'un champ scalaire à deux variables).
Pour représenter graphiquement le champ scalaire $f(x,y) = x^2 + y^2$, on trace les points de coordonnées $(x, y, f(x,y)) = (x, y, x^2 + y^2)$.
Sur la figure ci-contre, on voit que « plus la surface est basse au dessus d'un point (a,b) du plan, plus $f(a,b)$ est petit » .
« $f(a,b)$ est l'altitude de la surface au-dessus de (a,b) ».
La surface « touche le plan d'équation $z = 0$ en $(0;0)$ pour dire $f(a,b) = 0$ ».

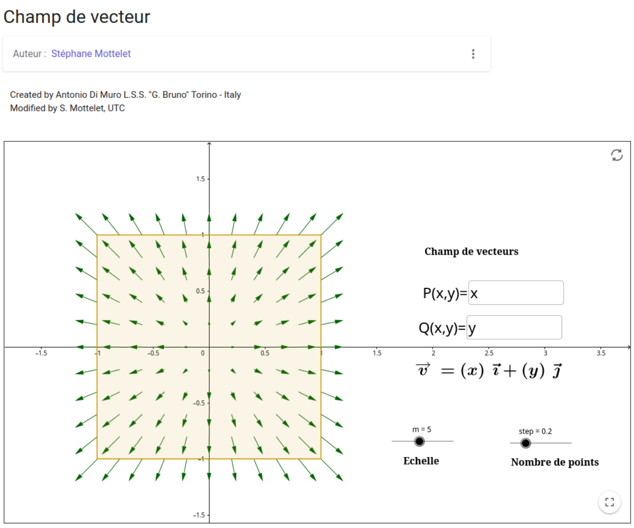
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Étape 1: Générer une grille de points pour x et y
x = np.linspace(-5, 5, 100)  # Crée 100 points entre -5 et 5 pour x
y = np.linspace(-5, 5, 100)  # Crée 100 points entre -5 et 5 pour y
X, Y = np.meshgrid(x, y)     # Crée une grille de coordonnées (X, Y)

# Étape 2: Calculer f(x, y) = x^2 + y^2 sur cette grille
Z = X**2 + Y**2

# Étape 3: Visualiser avec un graphique en 3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

# Ajouter des étiquettes pour les axes
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('f(X, Y) = X^2 + Y^2')

plt.show()
```

Figure 4



Écrire un programme *Python* pour représenter graphiquement le champ scalaire $f(x,y) = sin(x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)$.
Attention de ne pas « diviser par 0 »!

Exemple (Représentation graphique d'un champ de vecteurs à deux variables).
Pour représenter graphiquement le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, on représente en chaque point du plan (x,y) le vecteur $\overrightarrow{V}(x,y)$ avec une flèche ayant pour origine le point (x,y).
Sur la figure ci-contre, on a représenté graphiquement ce champ en utilisant l'interface de Stéphane Mottelet.



a) Via l'url https://www.geogebra.org/m/HhEks53g, utiliser l'interface de Stéphane Mottelet pour représenter ce champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

b) Comment sont les flèches quand on se rapproche de l'origine ?

c) Chercher un champ de vecteurs où « toutes les flèches se dirigent vers le haut ».

d) Chercher un champ de vecteurs où « toutes les flèches sont tangentes à un cercle centré en l'origine. ».

5 Gradient d'un champ scalaire

5.1 Lignes de niveau

Sur une certaine région, l'altitude est donnée par le champ scalaire $f(x,y) = x + y$.

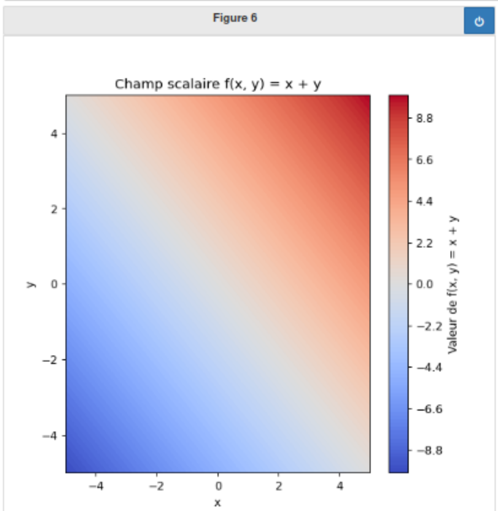
1) Comme dans la troisième section, on a représenté ci-contre ce champ scalaire avec un code couleur.
En observant cette coloration (de la partie du plan $[-5;5] \times [-5;5]$), pouvez-vous deviner le relief de la zone concernée ?

2) Écrire un programme *Python* pour représenter graphiquement ce champ scalaire et pour vérifier si votre intuition est correcte.

3) Déterminer l'ensemble des points d'altitude 0, c'est-à-dire « le bord de la mer ».

4) Soit $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble des points qui sont tous à la même altitude k.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Générer les points x et y sur une grille
x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = np.linspace(-5, 5, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Calculer le champ scalaire f(x, y) = x + y
Z = X + Y

# Créer la figure
plt.figure(figsize=(6, 6))

# Créer la carte de chaleur
plt.contourf(X, Y, Z, levels=100, cmap='coolwarm')

# Ajouter une barre de couleur pour indiquer les valeurs du champ scalaire
plt.colorbar(label='Valeur de f(x, y) = x + y')

# Ajouter des labels et un titre
plt.title('Champ scalaire f(x, y) = x + y')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

# Afficher la figure
plt.show()
```



Exemple (Ligne de niveau).
Un tel ensemble de points (qui sont tous à la même altitude) est appelé une courbe de niveau du champ scalaire f.

Définition (Ligne de niveau) **À savoir par cœur**
Soient f un champ scalaire défini sur une partie du plan et $k \in \mathbb{R}$.
La ligne de niveau k est l'ensemble des points (x,y) tel que $f(x,y) = k$.

5) Dans l'image de la section 3 représentant la météo, est-ce que les lignes de niveau du champ scalaire température sont représentées a minima ?

5.2 Dans quelle direction aller pour se réchauffer le plus vite possible étant donné le champ scalaire température ?

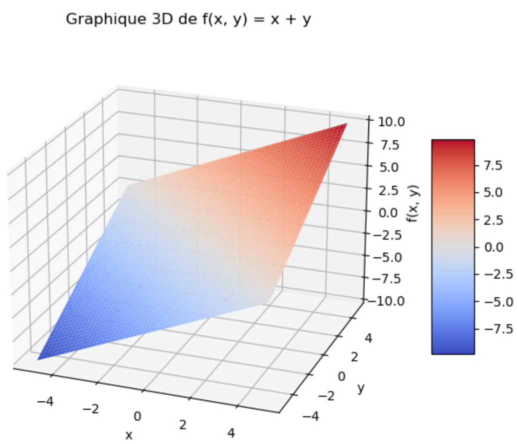
1) On reprend l'exemple du champ scalaire étudié dans la section précédente et dont la représentation graphique en 3D et la représentation graphique en couleur sont ci-contre.

   a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur (a,b) dont la direction est celle dans laquelle se diriger pour monter le plus vite possible la côte.

   b) Comment est ce vecteur par rapport aux lignes de niveau du champ scalaire f ?

   c) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j}$. Que constatez-vous ?

2) On suppose maintenant que le champ scalaire f représente non pas l'altitude mais la température.
Modifier en conséquence l'énoncé de la question 1)a).



5.3 Gradient d'un champ scalaire

Exemple (Gradient d'un champ scalaire).
Dans la section précédente, le champ de vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j}$ est appelé gradient du champ scalaire f. On le note $\overrightarrow{grad}f$.
C'est dans sa direction que le champ scalaire augmente le plus vite et il augmente d'autant plus vite que sa magnitude est grande.

Exemple (Gradient d'un champ scalaire).
Supposons que la température est donnée par $f(x,y)=xy^2+x^2y$ et cherchons dans quelle direction aller depuis le point $(1;2)$ pour se réchauffer le plus vite possible :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2+2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+x^2 \qquad \overrightarrow{grad}f=\left(y^2+2xy\right)\overrightarrow{i}+\left(2xy+x^2\right)\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{grad}f(1;2)=\left(2^2+2\times1\times2\right)\overrightarrow{i}+\left(2\times1\times2+1^2\right)\overrightarrow{j}=8\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}=(8;5)$$

Ainsi, si l'on est au point $(1;2)$ et que l'on veut se réchauffer le plus vite possible, il faut aller dans la direction $(8;5)$.
Autrement dit, si « on fait 13 pas, il faut en faire 8 suivant les x et 5 suivant les y » pour se réchauffer le plus vite possible.

1) Le gradient d'un champ scalaire est-il un champ scalaire ? Si non, qu'est-ce que c'est ?

2) Dans une certaine région, l'altitude est donnée par le champ scalaire $f(x,y)=xe^y-y\cos(x)$ et on est situé au point $(0;1)$.

   a) Calculer $\overrightarrow{grad}f$.

   b) Déterminer dans quelle direction aller pour gagner en altitude le plus rapidement possible.

Définition (Gradient d'un champ scalaire) **À savoir par cœur**
Soit f un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle gradient du champ scalaire f le champ de vecteurs noté $\overrightarrow{grad}f$ suivant :

$$\overrightarrow{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Remarques importantes sur le gradient **À savoir par cœur**
C'est dans la direction de $\overrightarrow{grad}f$ que les valeurs prisent par f augmentent le plus vite et elles augmentent d'autant plus vite que la magnitude de $\overrightarrow{grad}f$ est grande.
Si f est un champ scalaire à deux variables, $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0)$ est un vecteur normal à la courbe de niveau qui passe par (x_0,y_0).
Si f est un champ scalaire à trois variables, on parle de surface de niveau et $\overrightarrow{grad}f(x_0,y_0,z_0)$ est alors un vecteur normal au plan tangent à la surface de niveau qui passe par (x_0,y_0,z_0) (l'ensemble des (x,y,z) tels que $f(x_0,y_0,z_0)=f(x,y,z)$).

5.4 Calcul de gradients de champs scalaires en un point

1) On considère le champ scalaire $f\left(x,y,z\right)=xy^2-yz^2$.
   a) Calculer $\overrightarrow{grad} f$.
   b) Calculer $\overrightarrow{grad} f\left(1;2;3\right)$
   c) Comme on l'a déjà fait dans les sections 5.2 et 5.3, écrire une phrase en français pour interpréter ce résultat en faisant une analogie avec la température. Cela aurait-il un sens de faire une telle analogie avec l'altitude ?
2) On considère le champ scalaire $f\left(x,y,z\right)=xyz\sin\left(xy\right)$.
   a) Calculer $\overrightarrow{grad} f$.
   b) Calculer $\overrightarrow{grad} f\left(\frac{\pi}{2};1;1\right)$
   c) Comme on l'a déjà fait dans les sections 5.2 et 5.3, écrire une phrase en français pour interpréter ce résultat en faisant une analogie avec la température.

5.5 Application à l'étude des courbes et des surfaces de l'espace

5.5.1 La description explicites et la description implicite des objets géométriques

Concepts (La description explicites et la description implicite)
Il y a **deux façons de décrire** une courbe (de l'espace ou du plan) ou une surface de l'espace.

Par exemple, il y a deux façons de décrire le cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 et la sphère de centre $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 :

- Une **description explicite avec une paramétrisation** :
  - Le cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right)\\\sin\left(\theta\right)\end{pmatrix}$ quand θ parcourt $[0;2\pi[$.
  - La sphère de centre $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)\\\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)\\\cos\left(\phi\right)\end{pmatrix}$ quand $\left(\theta,\phi\right)$ parcourt $[0;2\pi[\times[0;\pi]$.
- Une **description implicite avec une équation** :
  - Le cercle de centre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que $x^2+y^2=1$.
  - La sphère de centre $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $x^2+y^2+z^2=1$.

Pour bien apprendre à distinguer une description explicite d'un objet géométrique d'une description implicite de cet objet avec de nombreux exemples, on faire l'exercice de la section « Distinguer la description explicite et la description implicite.

5.5.2 Les courbes du plan vues comme des courbes de niveau de champs scalaires à deux variables et les surfaces de l'espace vues comme des surfaces de niveau de champs scalaires à trois variables

Exemple (Une courbe du plan et une surface de l'espace vues comme courbe de niveau 0 et surface de niveau 0)
On note les champs scalaires suivants :

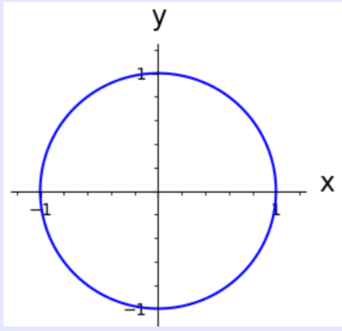
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x^2+y^2-1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x^2+y^2+z^2-1 \end{array}$$

- Le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels que $\underbrace{x^2+y^2-1}_{f(x,y)}=0$.
- La sphère de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1 est l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace tels que $\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g(x,y,z)}=0$.

Autrement dit :

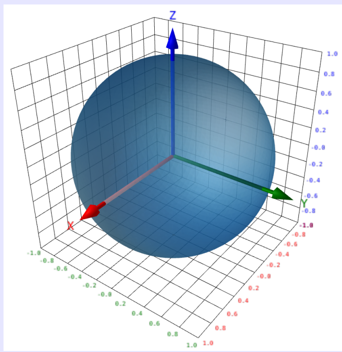
- Le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1 est la courbe de niveau 0 de f, i.e. :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0 \right\}$$



- La sphère de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1 est la surface de niveau 0 de g, i.e. :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0 \right\}$$



Définition (Courbe de niveau et surface de niveau) **À savoir par cœur**

- Soient un champ scalaire à deux variables $f(x,y)$ et k un nombre réel.
On appelle courbe de niveau k de f l'ensemble $\mathscr{C}$ suivant :

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=k \right\} = \left(\begin{array}{c} \text{l'ensemble des } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^2 \\ \text{tels que } f(x,y)=k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{R}^2 \\ \text{de l'équation } f(x,y)=k \\ \text{d'inconnnue } (x,y) \end{array} \right)$$

- Soient un champ scalaire à trois variables $g(x,y,z)$ et k un nombre réel.
On appelle surface de niveau k de g l'ensemble $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=k \right\} = \left(\begin{array}{c} \text{l'ensemble des } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \text{tels que } g(x,y,z)=k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{l'ensemble des solutions dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{de l'équation } g(x,y,z)=k \\ \text{d'inconnnue } (x,y,z) \end{array} \right)$$

Pour visualiser neuf exemples de surface de niveau 0, on peut faire l'exercice de la section « Visualiser des surfaces de niveau 0 de champ scalaire à trois variables ».

5.5.3 Déterminer la droite tangente à une courbe du plan

Théorème (Droite tangente à la courbe de niveau 0 d'un champ scalaire à deux variables).
Soit $f(x,y)$ un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$.
On note $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \right\}$ la courbe de niveau 0 de f.

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathscr{C}$.

Si $\overrightarrow{grad} f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}$ au point $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la droite qui passe par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et qui admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{grad} f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Méthode (Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe de niveau 0 d'un champ scalaire à deux variables).
On souhaite déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ au point $A = \left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
1ère étape : On écrit $\mathscr{C}$ sous la forme de la courbe de niveau 0 d'un champ scalaire f.

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \right\} \qquad \text{avec } f(x,y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 - 1$$

2ème étape : On calcule le gradient $\overrightarrow{grad} f(x,y)$ du champ scalaire f.

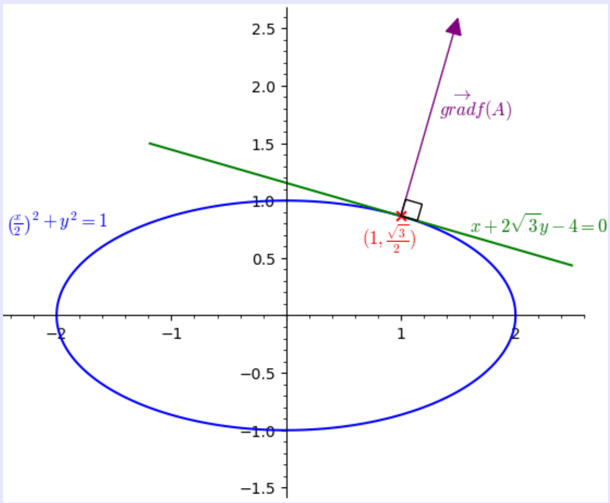
$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 2y \end{pmatrix}$$

3ème étape : On calcule $\overrightarrow{grad} f(A)$, le gradient de f au point A.

$$\overrightarrow{grad} f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4ème étape : On raisonne par équivalence pour déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
La tangente $\mathscr{D}$ à $\mathscr{C}$ au point A est la droite qui passe par A et qui admet $\overrightarrow{grad} f(A)$ comme vecteur normal.
On cherche quand un point $M = (x,y)$ appartient à $\mathscr{D}$:

$$\begin{aligned}
M = (x,y) \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{grad} f(A) \\
&\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{grad} f(A) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \boxed{(x - x_A) \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) + (y - y_A) \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) = 0} \\
&\iff (x-1) \times \frac{1}{2} + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} = 0 \\
&\iff (x-1) + \left(2y - \sqrt{3}\right) \times \sqrt{3} = 0 \\
&\iff \boxed{x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0}
\end{aligned}$$



Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A = \left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ admet l'équation cartésienne suivante d'inconnue (x,y) :

$$\boxed{x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0}$$

1) Dans chacun des cas suivants, démontrer que $A \in \mathscr{C}$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A :
   a) $\mathscr{C}$ est d'équation $x^2+3y=4$ et $A=(1;1)$.
   b) $\mathscr{C}$ est la ligne de niveau de $f\left(x,y\right)=2x^2y+2x^2+y^2$ qui passe par $(1;1)$ et $A=(1;1)$.
   c) $\mathscr{C}$ est la ligne de niveau 1 de $f\left(x,y\right)=\frac{1}{4}x^2+y^2$ et $A=(-2;0)$.

5.5.4 Déterminer le plan tangent à une surface de l'espace

Théorème (Plan tangent à la surface de niveau 0 d'un champ scalaire à trois variables).

Soit $f\left(x,y,z\right)$ un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\mathscr{S}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid f\left(x,y,z\right)=0\right\}$ la surface de niveau 0 de f.

Soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathscr{S}$.

Si $\overrightarrow{grad}f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq 0$, alors le plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est le plan qui passe par $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et qui admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{grad}f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

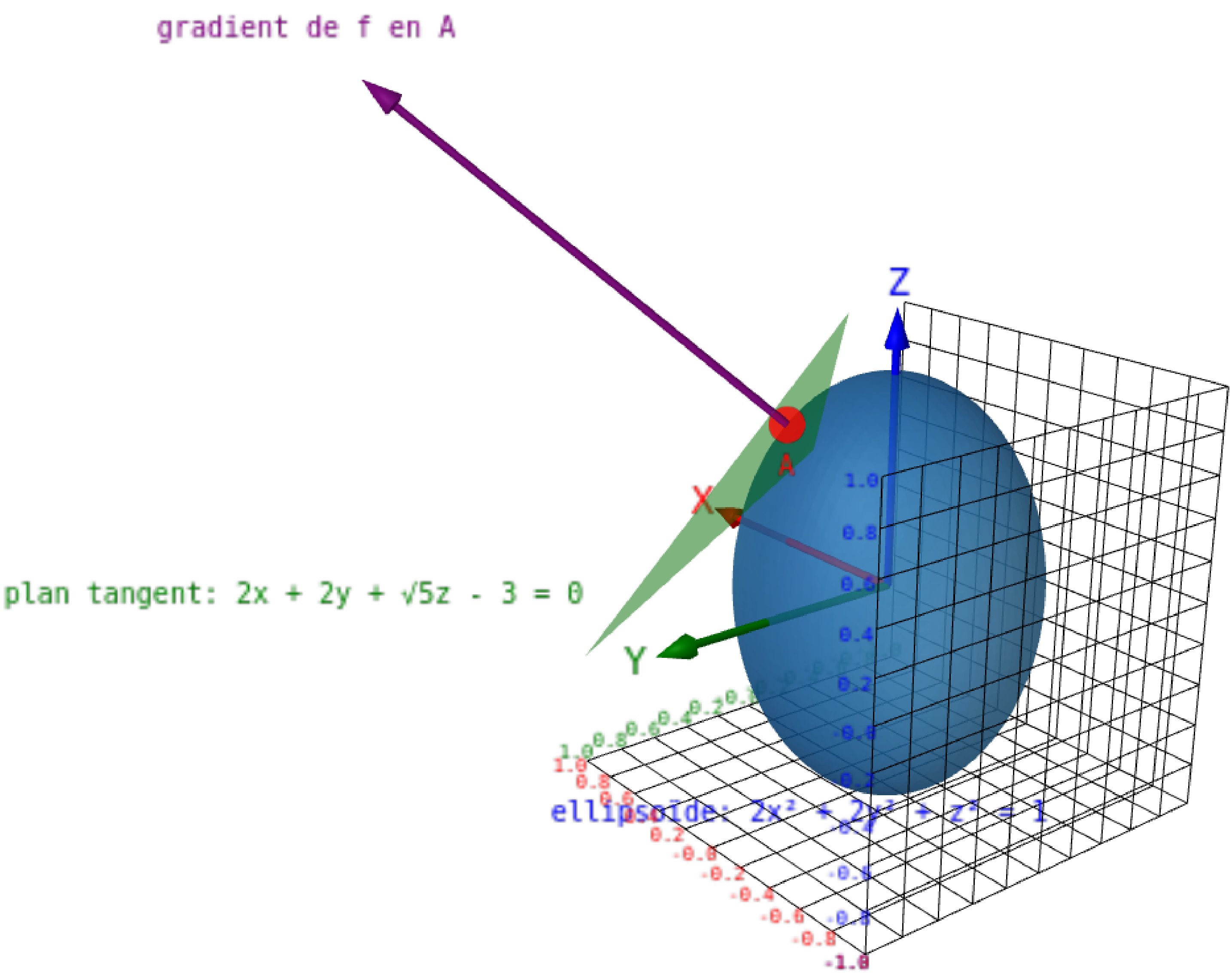


Illustration de la détermination de l'équation $2x+2y+\sqrt{5}z-3=0$ du plan tangent à la surface d'équation $2x^2+2y^2+z^2=1$ au point $A=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ dans la section « Méthode » suivante.

Méthode (Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface de niveau 0 d'un champ scalaire à trois variables).
On souhaite déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ d'équation $2x^2+2y^2+z^2=1$ au point $A=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.
<u>1^{ère} étape :</u> On écrit $\mathscr{S}$ sous la forme de la surface de niveau 0 d'un champ scalaire f.

$$\mathscr{C}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; f\left(x,y,z\right)=0\right\} \qquad \text{avec } f\left(x,y,z\right)=2x^2+2y^2+z^2-1$$

<u>2ème étape :</u> On calcule le gradient $\overrightarrow{grad}f\left(x,y,z\right)$ du champ scalaire f.

$$\overrightarrow{grad}f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}4x\\4y\\2z\end{pmatrix}$$

<u>3ème étape :</u> On calcule $\overrightarrow{grad}f\left(A\right)$, le gradient de f au point A.

$$\overrightarrow{grad}f\left(A\right)=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{2\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

<u>4ème étape :</u> On raisonne par équivalence pour déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point A.
Le plan tangent $\mathscr{P}$ à $\mathscr{S}$ au point A est le plan qui passe par A et qui admet $\overrightarrow{grad}f\left(A\right)$ comme vecteur normal.
On cherche quand un point $M=\left(x,y,z\right)$ appartient à $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}
M=\left(x,y,z\right)\in\mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{grad}f\left(A\right)\\
&\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{grad}f\left(A\right)=0\\
&\iff \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_A,y_A,z_A\right)\\\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_A,y_A,z_A\right)\\\frac{\partial f}{\partial z}\left(x_A,y_A,z_A\right)\end{pmatrix}=0\\
&\iff \boxed{(x-x_A)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_A,y_A,z_A\right)+\left(y-y_A\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_A,y_A,z_A\right)+(z-z_A)\frac{\partial f}{\partial z}\left(z_A,y_A,z_A\right)=0}\\
&\iff \left(x-\frac{1}{3}\right)\times\frac{4}{3}+\left(y-\frac{1}{3}\right)\times\frac{4}{3}+\left(z-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{3}=0\\
&\iff (3x-1)\times4+\left(3y-1\right)\times4+\left(3z-\sqrt{5}\right)\times2\sqrt{5}=0\\
&\iff 12x+12y+6\sqrt{5}z-18=0\\
&\iff \boxed{2x+2y+\sqrt{5}z-3=0}
\end{aligned}$$

Donc le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point $A=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ admet l'équation cartésienne suivante d'inconnue $\left(x,y,z\right)$:

$$\boxed{2x+2y+\sqrt{5}z-3=0}$$

1) Dans chacun des cas suivants, démontrer que $A\in\mathscr{S}$ puis déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point A :
   a) $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1 et $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
   b) $\mathscr{S}=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid z=y^2-x^2\right\}$ et $A=(1;2;3)$.
2) Pour quelles valeurs non nulles de k la surface de niveau $x^2+y^2-z^2=k$ admet-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $z=0$?

5.5.5 Déterminer une équation du plan tangent à la représentation graphique d'un champ scalaire à deux variables en un point

Remarque (Graphe d'un champ scalaire à deux variables vu comme surface de niveau d'un champ scalaire à trois variables)
La représentation graphique d'un champ scalaire à deux variables $f(x, y)$ est la surface de niveau 0 du champ scalaire à trois variables $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

On peut donc appliquer la section précédente pour déterminer une équation du plan tangent à la représentation graphique d'un champ scalaire à deux variables en un point.

1) On note :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \ln(x) - \ln(y) \end{array}$$

Et on note aussi $\mathscr{S}$ la représentation graphique de f et α le réel tel que le point $(e; 1; \alpha)$ appartient à $\mathscr{S}$.

   a) Recopier et compléter :

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ldots \mid \ldots \right\}$$

   b) De quel champ scalaire $\mathscr{S}$ est-il la surface de niveau 0 ?
   c) Déterminer α.
   d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $(e; 1; \alpha)$.

2) Refaire la question 1) avec le champ scalaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & 2 - \exp\left(-\frac{x^3}{3} + x - y^2\right) \end{array}$$

et α le réel tel que le point $(1; 0; \alpha)$ appartient à $\mathscr{S}$.

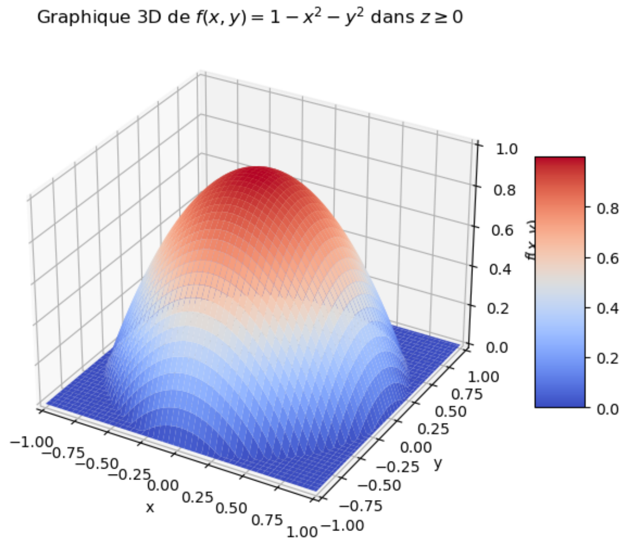
3) Refaire la question 1) avec le champ scalaire suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{y}{1+x^2} \end{array}$$

6 Champs de vecteurs dérivant d'un champ scalaire

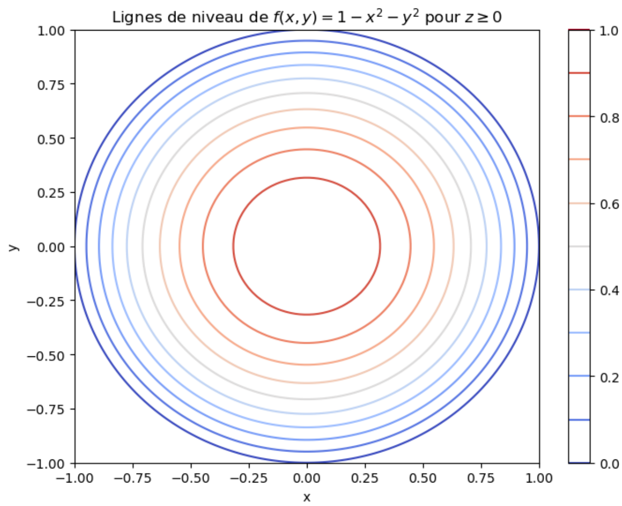
6.1 Représentation graphique

Comme dans la section 4.2, sur la figure ci-contre, on a représenté le champ scalaire $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
Si ce champ scalaire représente l'altitude dans une région, alors ce graphique montre le relief de cette région.



Sur la figure ci-contre, on a représenté les lignes de niveaux 0 ; $0,1$; $0,2$; ... ; $0,9$ de ce champ scalaire $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{grad} f$.

1) À quoi correspond le rapprochement de ces lignes quand on se rapproche du bord ?
2) Pour un point (x_0, y_0), donner sans calcul la direction de $-\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$.
3) Calculer $-\overrightarrow{grad} f$.
4) Représenter ce champ de vecteurs avec des flèches.
5) Via l'url `https://www.geogebra.org/m/HhEks53g`, utiliser l'interface de Stéphane Mottelet, vérifier votre représentation.
6) Compléter :
On visualise ainsi comment le champ scalaire f influence le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$. En effet, comme dans la section 5.3, pour un point (x_0, y_0), on a :
   - $\overrightarrow{V}(x_0, y_0)$ est **...** à la courbe de niveau de **...** en **....**
   - La magnitude de $\overrightarrow{V}(x_0, y_0)$ est d'autant **....**



6.2 Potentiels scalaires

Définition (Potentiel scalaire) **À savoir par cœur**
Soit un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$.
On dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f de classe $\mathscr{C}^1$ tel que :

$$\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{grad} f$$

Si $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, une champ scalaire f de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $-grad f = \overrightarrow{V}$ est appelé un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$.

6.3 Recherche de potentiels scalaires

Démontrer que le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont il dérive où $\overrightarrow{V}$ est le champ de vecteurs suivant :

1) $\overrightarrow{V}(x,y) = 2x\overrightarrow{i} + (1-y)\overrightarrow{j}$
2) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (2xy + z^3)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j} + 3xz^2\overrightarrow{k}$
3) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2xy\overrightarrow{i} + (x^2+z)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$
4) $\overrightarrow{V}(x,y) = -\frac{y}{(x-y)^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{(x-y)^2}\overrightarrow{j}$

7 Lignes de champ d'un champ de vecteurs

7.1 Représentation des trajectoires des particules d'un fluide

On considère un fluide « applati » dont le champ de vitesses $\overrightarrow{V}$ est donné par :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = 2x\,\overrightarrow{i} + (1-y)\,\overrightarrow{j}$$

On cherche à déterminer la trajectoire d'une particule qui passe par le point (x_0, y_0) à un instant t_0.
Autrement dit, on cherche la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$ (représentant sa position en fonction du temps) de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\begin{cases} M(t_0) = (x_0, y_0) & \text{C'est à l'instant } t_0 \text{ qu'elle passe par le point } (x_0,y_0). \\ M'(t) = \overrightarrow{V}(x(t), y(t)) & \text{À tout instant } t\text{, sa vitesse est } \overrightarrow{V}(x(t),y(t)). \end{cases}$$

<u>1ère méthode :</u>

$$\begin{cases} (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \\ (x'(t), y'(t)) = (2x(t), 1-y(t)) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = 1 - y(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ \text{Il existe } C_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x(t) = C_1 e^{2t} \\ \text{Il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) = 1 + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

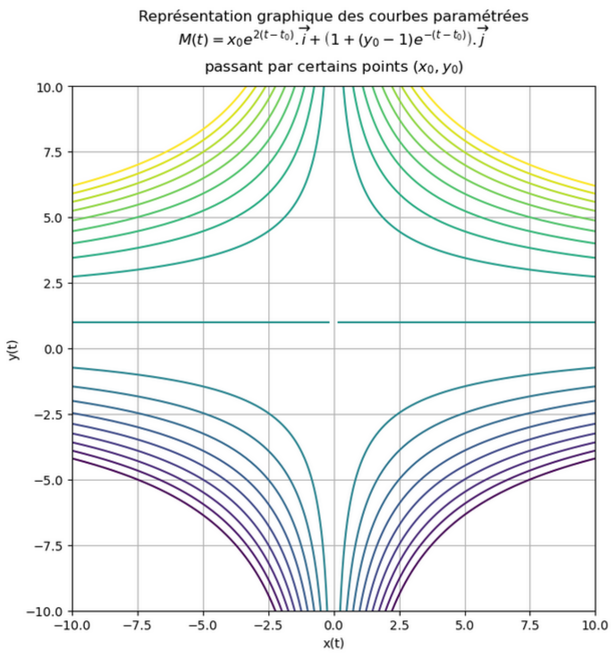
(En utilisant le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1.)

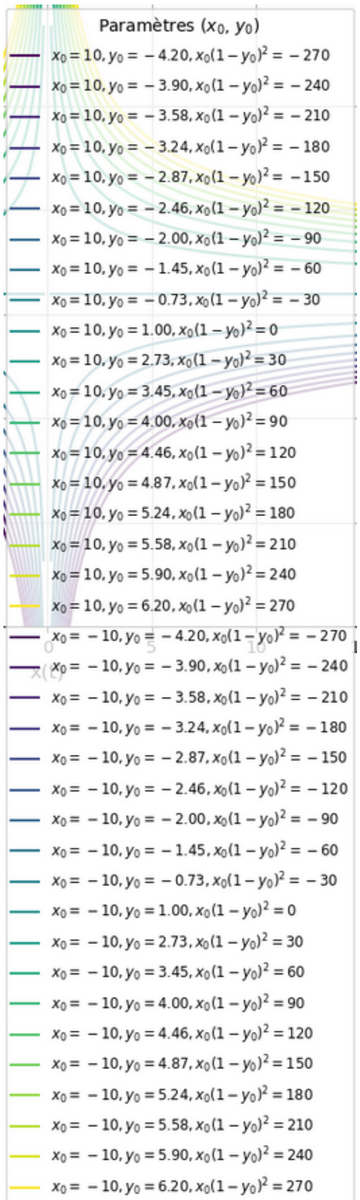
$$\iff \text{Il existe } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(t_0) = x_0 = C_1 e^{2t_0} \\ y(t_0) = y_0 = 1 + C_2 e^{-t_0} \\ x(t) = C_1 e^{2t} \\ y(t) = 1 + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} C_1 = x_0 e^{-2t_0} \\ C_2 = (y_0 - 1)\, e^{t_0} \\ x(t) = C_1 e^{2t} \\ y(t) = 1 + C_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-2t_0} e^{2t} \\ y(t) = 1 + (y_0 - 1)\, e^{t_0} e^{-t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = x_0 e^{2(t-t_0)} \\ y(t) = 1 + (y_0 - 1)\, e^{-(t-t_0)} \end{cases}$$





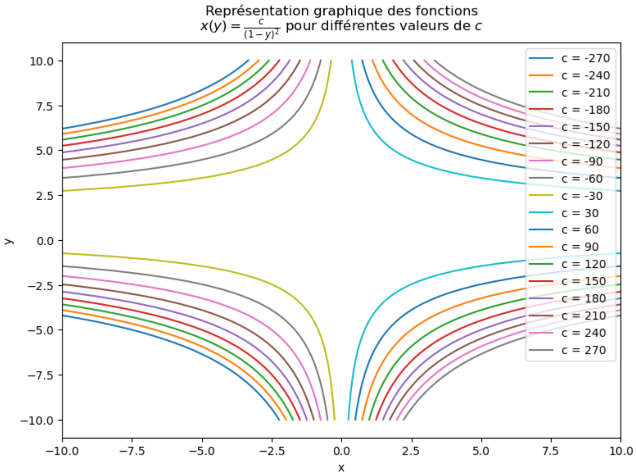
$2^{\text{ème}}$ méthode :

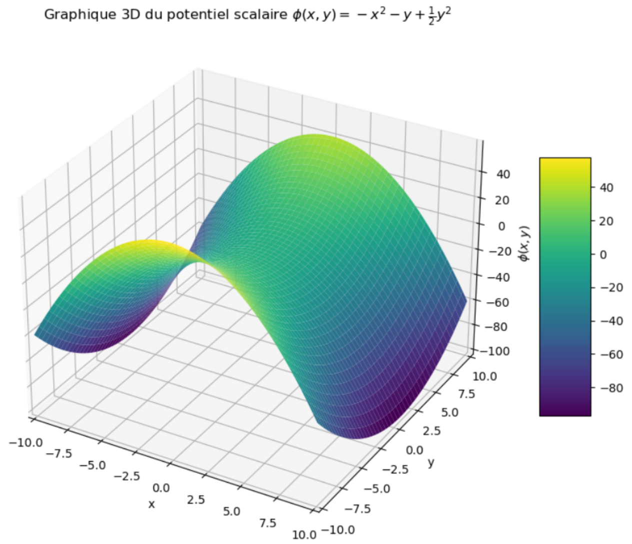
$$M'(t) \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{V}\left(x(t), y(t)\right)$$
$$M'(t) \wedge \overrightarrow{V}\left(x(t), y(t)\right) = 0$$
$$\begin{vmatrix} x'(t) & 2x(t) \\ y'(t) & 1-y(t) \end{vmatrix} = 0$$

$$x'(t)\left(1-y(t)\right) - y'(t)\,2x(t) = 0$$

⚠ La suite n'est valable que quand $x(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette méthode ne détermine donc pas toutes les trajectoires. Elle ne détermine pas ici les trajectoires qui coupent au moins l'une des droites d'équation $x = 0$ et $y = 1$:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 2\frac{y'(t)}{1-y(t)}$$
$$\ln(|x(t)|) = -2\ln\left(\left|1-y(t)\right|\right) + \text{cste}$$
$$\ln(|x(t)|) = \ln\left(\frac{1}{\left(1-y(t)\right)^2}\right) + \text{cste}$$
$$|x(t)| = \underbrace{e^{\text{cste}}}_{\substack{\text{une constante}\\ \text{strictement positive}}} \frac{1}{\left(1-y(t)\right)^2}$$
$$x(t) = \underbrace{\pm e^{\text{cste}}}_{\substack{\text{une constante}\\ \text{non nulle}}} \frac{1}{\left(1-y(t)\right)^2}$$
$$x(t) = \underbrace{C}_{\substack{\text{une constante}\\ \text{non nulle}}} \frac{1}{\left(1-y(t)\right)^2}$$
$$x_0 = C\frac{1}{\left(1-y_0\right)^2}$$
$$C = x_0\left(1-y_0\right)^2$$
$$x(t) = x_0\left(1-y_0\right)^2 \frac{1}{\left(1-y(t)\right)^2}$$



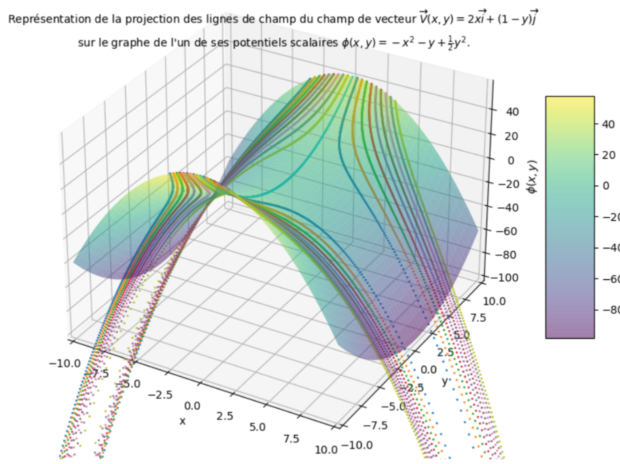


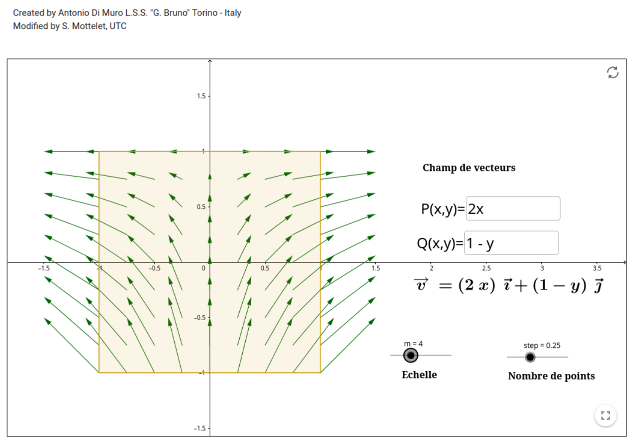
Quelles sont les trajectoires qui ont été déterminées par la $1^{\text{ère}}$ méthode mais qui n'ont pas été déterminées par la $2^{\text{ème}}$ méthode ?

Dans 1) de la section 6.3, on a démontré que ce champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive du potentiel scalaire ϕ représenté graphiquement ci-dessus et défini par :

$$\phi(x, y) = -x^2 - y + \frac{1}{2}y^2$$

Les deux figures suivantes illustrent bien que si $\overrightarrow{V}$ est le champ de vitesses d'un fluide applati, les particules se déplacent dans la direction de plus forte pente du graphe de ce potentiel scalaire (cf figure de gauche) et d'autant plus vite que la pente est raide (cf figure de droite).





7.2 Les lignes d'un champ de vecteurs

Exemple (Ligne d'un champ de vecteurs).
Dans la section 7.1, la trajectoire d'une particule du fluide « aplati » est applelée une ligne du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$.

Définition (Ligne d'un champ de vecteurs) **À savoir par cœur**
Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ un champ de vecteurs.
On appelle ligne du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ l'image d'une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall t,\ M'(t) = \overrightarrow{V}(M(t))$$

7.3 Détermination et représentation des lignes d'un champ de vecteurs

On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = 3x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

1) Déterminer les lignes de champ de $\overrightarrow{V}$.
2) Via *Python* et *Jupyter*, représenter graphiquement la ligne de champ qui passe par le point $(1,1)$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ tel que $\phi(0,0) = 0$.
4) Via *Python* et *Jupyter*, représenter graphiquement ce potentiel scalaire ϕ.
5) Comme dans l'avant-dernière figure de la section 7.1, via *Python* et *Jupyter*, représenter sur le même graphique le potentiel scalaire ϕ et la projection de la ligne de champ susmentionnée sur cette surface (i.e. les points $\left(x(t), y(t), \phi\left(x(t), y(t)\right)\right)$ où les $\left(x(t), y(t)\right)$ sont les points de cette ligne de champ).

8 Divergence d'un champ vectoriel

8.1 Définition

Notation (Composantes d'un champ de vecteurs).
Soient $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs et (x,y,z) un point de l'espace.
Comme $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est un vecteur de l'espace, il a trois composantes que l'on note $V_x(x,y,z)$, $V_y(x,y,z)$ et $V_z(x,y,z)$.
Ainsi :

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\overrightarrow{i} + V_y(x,y,z)\overrightarrow{j} + V_z(x,y,z)\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} V_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Attention x dans $V_x(x,y,z)$ ne désigne pas du tout la même chose que x dans $V_x(x,y,z)$.
x dans $V_x(x,y,z)$ désigne la première composante (l'abscisse) du point (x,y,z).
Le x seul dans $V_x(x,y,z)$ n'a pas de sens. C'est la notation V_x qui a un sens et qui désigne la première composante du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$.

Soit (x_0, y_0, z_0) un point de l'espace.

1) La notation $V_x(x_0,y_0,z_0)$ désigne-t-elle un nombre, un vecteur, un champ scalaire ou un champ de vecteurs ?
2) La notation V_x désigne-t-elle un nombre, un vecteur, un champ scalaire ou un champ de vecteurs ?

Définition (Divergence d'un champ de vecteurs) **À savoir par cœur**
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle divergence du champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ le champ scalaire noté $div\overrightarrow{V}$ suivant :

$$div\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

8.2 Interprétation physique

La divergence d'un champ vectoriel de classe $\mathscr{C}^1$ en un point donne une mesure de la quantité de flux qui "sort" ou "entre" dans une petite région autour de ce point. Si on imagine que le champ vectoriel représente un champ de vitesses d'un fluide, la divergence en un point nous indique si le fluide est en train de s'accumuler ou de se disperser à ce point.

Soients $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ et (a, b, c) un point de l'espace. **À savoir par cœur**

- Si $div\overrightarrow{V}\,(a,b,c) > 0$: Plus de fluide sort de la petite région autour du point (a,b,c) qu'il n'y entre.
  Ce point agit comme une « source » de fluide.
- $div\overrightarrow{V}\,(a,b,c) < 0$: Plus de fluide entre dans la petite région autour du point (a,b,c) qu'il n'en sort.
  Ce point agit comme un « puits » ou un « absorbeur » de fluide.
- $div\overrightarrow{V}\,(a,b,c) = 0$: Le flux entrant dans la petite région autour du point (a,b,c) est égal au flux sortant.
  En (a,b,c), il n'y a ni accumulation ni diminution de fluide.
  Le fluide est alors simplement redistribué.

Cette interprétation aide à comprendre des phénomènes physiques variés comme le flux d'air dans les systèmes météorologiques, les courants océaniques, ou la distribution de charge dans un champ électrique.

8.3 Calcul de divergences de champs vectoriels

Déterminer $div\overrightarrow{V}$ où $\overrightarrow{V}$ est le champ de vecteurs suivant :

1) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2x^2y\,\overrightarrow{i} + 2xy^2\,\overrightarrow{j} + xy\,\overrightarrow{k}$
2) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \sin(xy)\,\overrightarrow{i} + \cos(xz)\,\overrightarrow{k}$
3) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x(2y+z)\,\overrightarrow{i} - y(x+z)\,\overrightarrow{j} + z(x-2y)\,\overrightarrow{k}$

9 La notation nabla

9.1 Écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels

Notation-définition (Opérateur $\overrightarrow{\nabla}$) **À savoir par cœur**
On appelle opérateur nabla la notation suivante :

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{pmatrix}$$

Attention cette notation n'a aucun sens (En fait elle en a un en tant que fonction associant à une fonction une fonction mais ce concept dépasse le cadre de ce cours). Elle sert uniquement à écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels.

Par exemple :

Notation (Gradient d'un champ scalaire avec la notation $\overrightarrow{\nabla}$) **À savoir par cœur**
Soit f un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\overrightarrow{grad}f = \overrightarrow{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{pmatrix}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial_x} \\ \frac{\partial f}{\partial_y} \\ \frac{\partial f}{\partial_z} \end{pmatrix}$$

Penser « On applique $\overrightarrow{\nabla}$ à f. ».

Notation (Divergence d'un champ de vecteurs avec la notation $\overrightarrow{\nabla}$) **À savoir par cœur**
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$.

$$div\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Penser « Le produit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ par $\overrightarrow{V}$. ».

9.2 Calculer avec l'opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$

Soient f un champ scalaire et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs.

1) Pour chacune des écritures suivantes, dire si elle a un sens. Si tel est le cas, dire ce qu'elle désigne (Un nombre, un vecteur, un champ scalaire ou un champ vectoriel ?) et l'écrire sans utiliser ni la notation div ni la notation $\overrightarrow{grad}$.
   a) $div f$
   b) $div \overrightarrow{V}$
   c) $\overrightarrow{grad} \overrightarrow{V}$
   d) $\overrightarrow{\nabla} \cdot f$
   e) $\overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{V}$
   f) $\overrightarrow{\nabla} f$
   g) $\overrightarrow{grad} f$
   h) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$
   i) $div \overrightarrow{\nabla} f$
   j) $\overrightarrow{\nabla} div \overrightarrow{V}$
   k) $\overrightarrow{\nabla} \cdot div \overrightarrow{V}$
   l) $\overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{grad} f$
   m) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{grad} f$
   n) $\overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$
   o) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$

2) Calculer chacune des expressions précédentes qui ont un sens dans chacun des cas suivants :
   a) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(3x^2y+3\right)\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$
   b) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(3x^2y+3\right)\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$
   c) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{y}{x^3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{x^2}\overrightarrow{j}$
   d) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$
   e) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$
   f) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(6x\sin(z) - y^3e^x\right)\overrightarrow{i} + \left(-3y^2e^x + \sin(y)\right)\overrightarrow{j} + 3x^2\cos(z)\overrightarrow{k}$
   g) $f(x,y,z) = \exp\left(x\cos(y) + \ln\left(1+z^2\right)\right)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$

10 Laplacien d'un champ scalaire

Définition (Laplacien) **À savoir par cœur**

Soit f un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^2$.
On appelle laplacien du champ scalaire f le champ scalaire noté Δf suivant :

$$\Delta f = div\, \overrightarrow{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notation (Laplacien d'un champ scalaire avec la notation $\overrightarrow{\nabla}$) **À savoir par cœur**

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^2$.

$$\Delta f = div\, \overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \\ \frac{\partial}{\partial_z} \end{pmatrix} f$$

Penser « Le produit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ par lui-même puis appliquer à f. ».

Dans la section 9.2, quand a-t-on calculé les laplaciens des champs scalaires de la question 2) ?

11 Rotationnel d'un champ de vecteurs

11.1 Définition

Définition (Rotationnel d'un champ de vecteurs) **À savoir par cœur**
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$.
On appelle rotationnel du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs noté $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$ suivant :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

Notation (Rotationnel d'un champ de vecteurs avec la notation $\overrightarrow{\nabla}$) **À savoir par cœur**
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & V_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & V_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & V_x \\ \frac{\partial}{\partial z} & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & V_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Penser « Le produit vectoriel de $\overrightarrow{\nabla}$ par $\overrightarrow{V}$. ».

11.2 Interprétation physique

Le rotationnel d'un champ de vecteurs exprime la tendance qu'ont les lignes de champ à tourner autour d'un point.**À savoir par cœur**

11.3 Démontrer qu'un champ de vecteurs dérive d'un potentiel via le rotationnel

Théorème de Schwarz **À savoir par cœur**
Les dérivées partielles secondes croisées d'un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^2$ sont égales.

Exemple
Si f est un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^2$, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_z} = \frac{\partial^2 f}{\partial_z \partial_x}$$

1) Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Démontrer que :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = 0$$

Théorème (Caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel) **À savoir par cœur**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ telle que toutes les courbes fermées dans Ω peuvent être continuement déformées (en restant dans Ω) en un point et soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ défini sur Ω.
Alors :

$$\overrightarrow{V} \text{ dérive d'un potentiel} \iff \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = 0$$

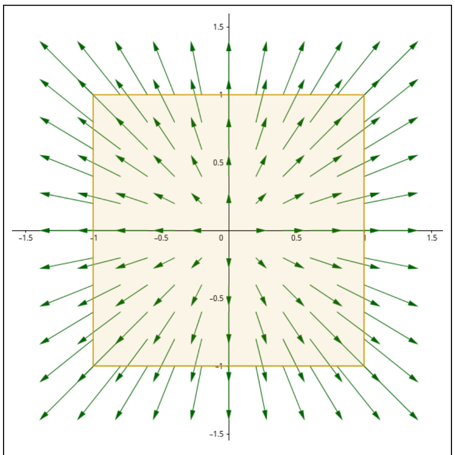
2) Démontrer que les champs de vecteurs définis dans la section 6.3 dérivent d'un potentiel en appliquant le théorème précédent.

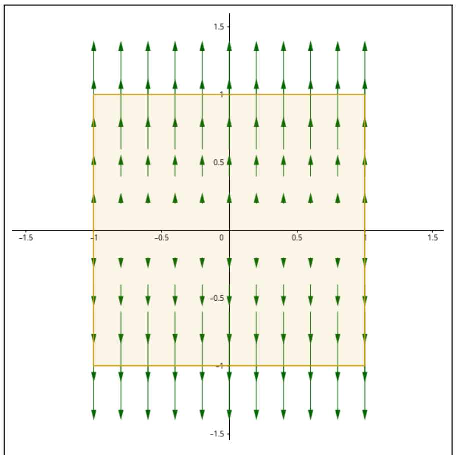
12 Autres exercices

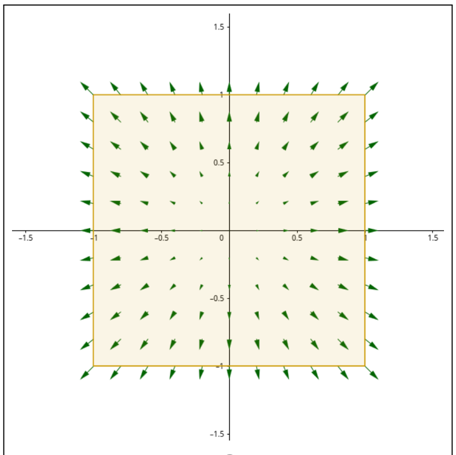
12.1 Visualiser des champs de vecteurs à deux variables

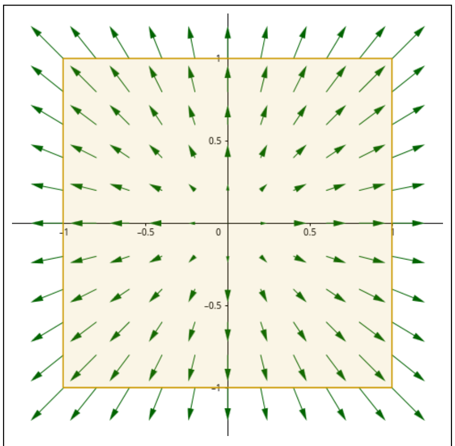
Associer chacun des champs de vecteurs suivants à sa représentation graphique (obtenue via l'interface de Stéphane Mottelet) :

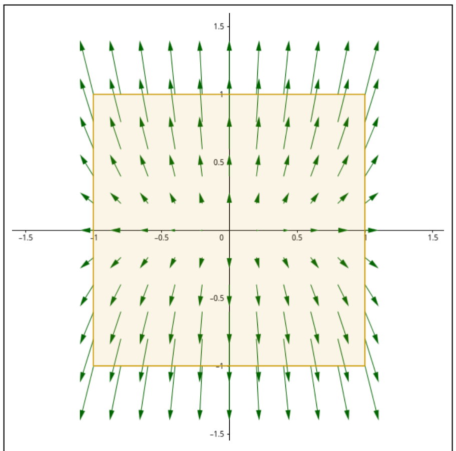
1) $\overrightarrow{V}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$
2) $\overrightarrow{V}(x,y) = 2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$
3) $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{x}{2}\overrightarrow{i} + \frac{y}{2}\overrightarrow{j}$
4) $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{x}{2}\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j}$
5) $\overrightarrow{V}(x,y) = 2x\overrightarrow{i} + \frac{y}{2}\overrightarrow{j}$
6) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$
7) $\overrightarrow{V}(x,y) = -y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$
8) $\overrightarrow{V}(x,y) = 2x\overrightarrow{j}$
9) $\overrightarrow{V}(x,y) = 2y\overrightarrow{j}$

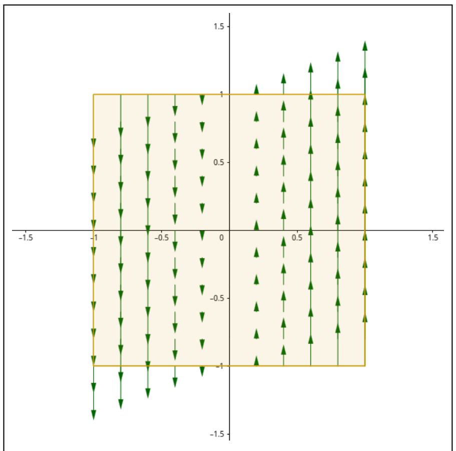

A

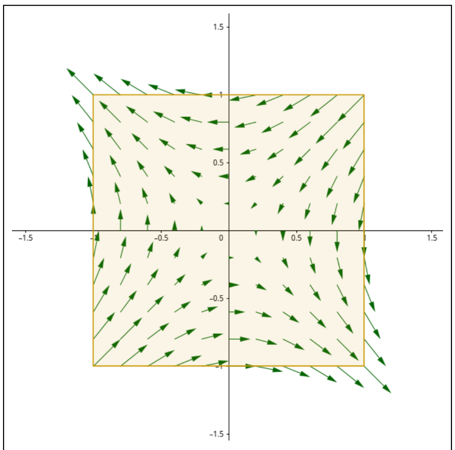

B

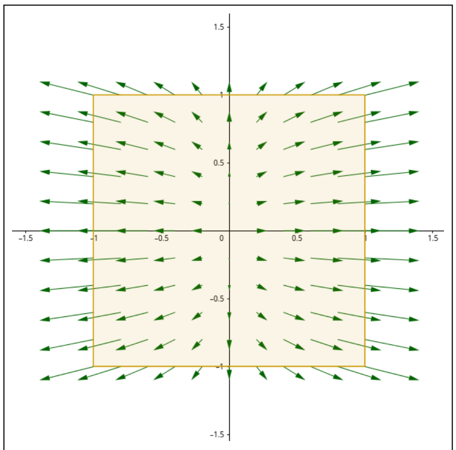

C

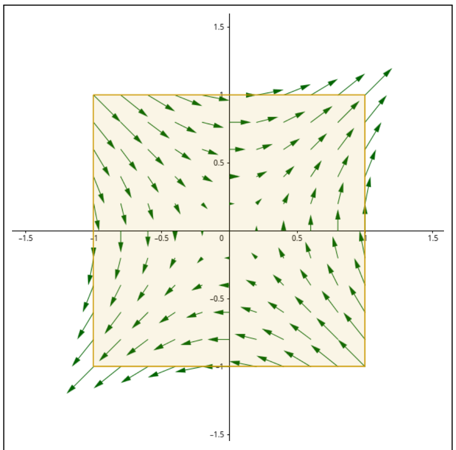

D


E


F


G

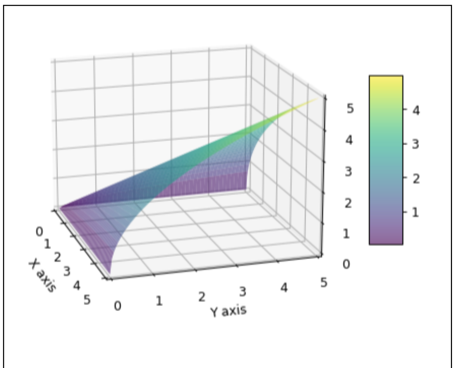

H


I

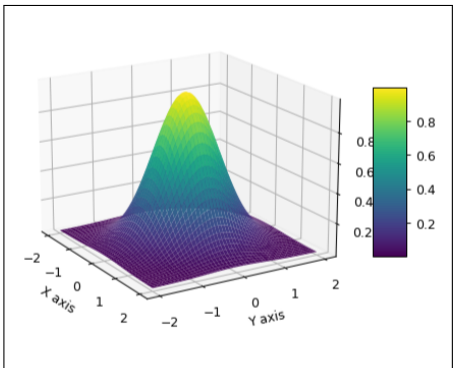
12.2 Visualiser des champs scalaires à deux variables

Associer chacun des champs scalaires suivants à sa représentation graphique :

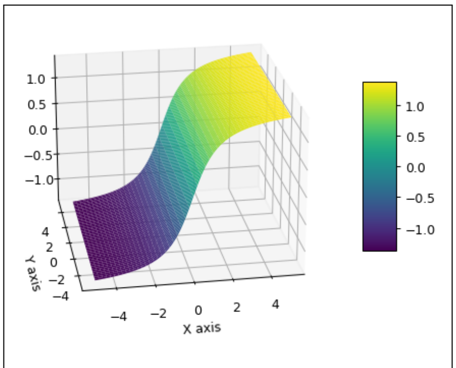
1) $f(x, y) = -2x + 3y$
2) $f(x, y) = x^2 + y^2$
3) $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$
4) $f(x, y) = \exp(x + y)$
5) $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$
6) $f(x, y) = \sqrt{y}e^x$
7) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$
8) $f(x, y) = \arctan(x)$
9) $f(x, y) = \arctan(y)$



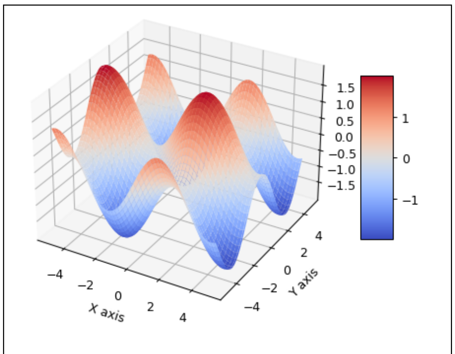
A



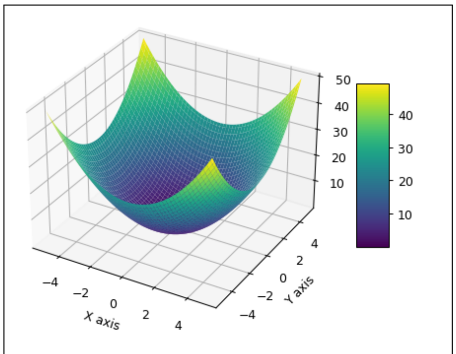
B



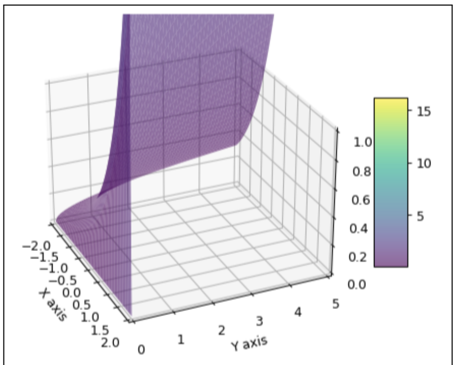
C



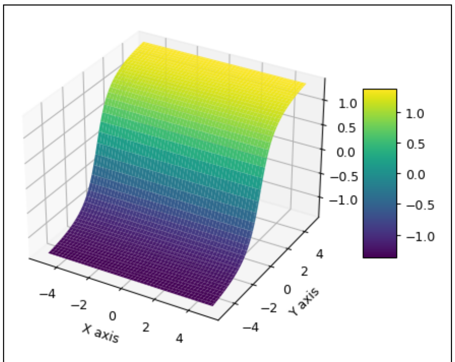
D



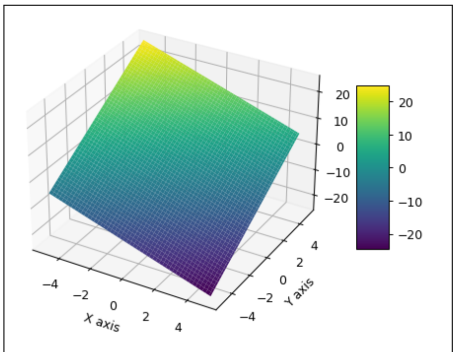
E



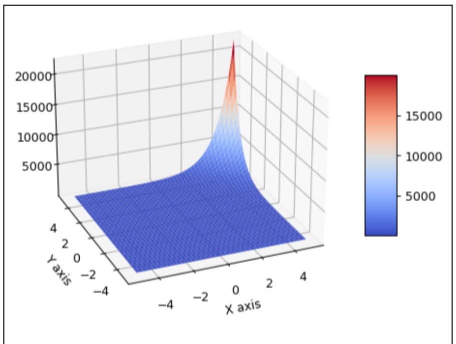
F



G



H



I

12.3 Lignes d'un champ tourbillonnaire

On note :

$$\overrightarrow{V} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Calculer $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$.
2) $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ dérive-t-il d'un potentiel ?
3) Sans utiliser le théorème de caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel, démontrer par l'absurde que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.
4) En utilisant le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, démontrer que les lignes du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ sont les images des courbes paramétrées définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = A\left(\cos\left(t-\phi\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(t-\phi\right)\overrightarrow{j}\right) \text{ où } A \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \phi \in [0;2\pi[$$

12.4 Un champ de vecteurs de rotationnel nul mais ne dérivant pas d'un potentiel

On note :

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z \in \mathbb{R}\right\} \qquad \begin{array}{rccc} \overrightarrow{V}: & \Omega & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Décrire avec une phrase l'ensemble Ω.
2) Calculer $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$.
3) Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ satisfait-il les hypothèses du théorème de caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel ?
4) Cette question permet de montrer que ce théorème serait faux si on lui enlevait cette hypothèse.
En effet, on va montrer que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.
Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{V}$$

On note :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & f\left(\cos(\theta), \sin(\theta), 0\right) \end{array}$$

a) Calculer $\int_0^{2\pi} F'(\theta)\, d\theta$.
b) On admet que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ F'(\theta) = \left(\left(\overrightarrow{\nabla} F\right)\left(\gamma(\theta)\right)\right) \cdot \gamma'(\theta)$$

Calculer F'.
c) Obtenir une contradiction avec la question 4)a) et terminer ce raisonnement par l'absurde.

12.5 Propriétés des opérateurs vectoriels et définition du laplacien vectoriel

Définition (Laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs).
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs. On note $\Delta\overrightarrow{V}$ et on appelle laplacien vectoriel du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs suivant :

$$\Delta\overrightarrow{V} = \Delta V_x\,\overrightarrow{i} + \Delta V_y\,\overrightarrow{j} + \Delta V_z\,\overrightarrow{k}$$

Soient $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^2$ et ϕ un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$.
Démontrer que :

1) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\phi\overrightarrow{V}\right) = \phi\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) + \left(\overrightarrow{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{V}$

2) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right) = \left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{U}\right)\cdot\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right)$

3) $\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) = \Delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right)$

4) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right) = 0$

12.6 Distinguer la description explicite et la description implicite

1) Dire dans chacun des cas suivants s'il s'agit d'une description explicite ou d'une description implicite de l'objet géométrique concerné :

   a) Le cercle $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$.

   b) L'ensemble des points $\left(t,t^2\right)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

   c) L'ensemble $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ z=0\right\}$.

   d) La courbe du plan d'équation $y=x^2$.

   e) La courbe de l'espace d'équations :

$$\begin{cases} y=x^2\\ z=0\end{cases}$$

   f) La surface de l'espace d'équation $y=x^2$.

   g) L'ensemble $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\right\}$.

   h) La courbe d'équation $x^2+y^2=1$ d'inconnue (x,y).

   i) La courbe paramétrée par :

$$\begin{array}{llll}\gamma: & [0;2\pi[& \to & \mathbb{R}^3\\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix}\end{array}$$

   j) La surface paramétrée par :

$$\begin{array}{llll}p: & [0;2\pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3\\ & \begin{pmatrix}\theta\\ t\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ t\end{pmatrix}\end{array}$$

   k) Le plan d'équation $2x+3y-7z=8$ d'inconnue (x,y,z).

   l) On note :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}\qquad\qquad A=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times4+3\times0-7\times0\\0\\0\end{pmatrix}$$

   Le plan constitué de tous les points $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}$

   (c'est-à-dire tels que $0=\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}x-4\\y-0\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}=(x-4)\times2+\left(y-0\right)\times3+(z-0)\times(-7)=0$).

   m) Soit f un champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^2$.
   La surface paramétrée par :

$$\begin{array}{llll}F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ & \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}\end{array}$$

   n) La courbe $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1\right\}$.

   o) La droite d'équations cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} 3x-2y=-1\\ x-2z=-5\end{cases}$$

p) La droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

q) La droite (du plan) d'équation cartésienne $x + y = 0$.

r) L'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tels que les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

s) Le plan de l'espace d'équation cartésienne $x + y = 0$.

t) Le graphe du champ scalaire $f(x, y)$, c'est-à-dire l'ensemble suivant :

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \right) \right\}$$

u)

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\exists\, t \in \mathbb{R} \mid M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \,.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

v) La droite passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

w) La surface $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}$.

x) La courbe paramétrée par :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0;2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

y) La courbe de niveau 1 du champ scalaire $f(x, y) = x^2 + y^2$.

z) La surface de niveau 1 du champ scalaire $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

2) Avec l'abus de notation « $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ » (c'est-à-dire « en assimilant $\mathbb{R}^2$ au plan (de l'espace) d'équation $z = 0$ »), lister toutes les lettres correspondant dans la question précédente à une description...

a) ...du cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1.

b) ...de la représentation graphique de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

c) ...d'un cylindre.

d) ...du plan d'équation $2x + 3y - 7z = 8$ d'inconnue (x, y, z).

e) ...de la droite (du plan) d'équation cartésienne $x + y = 0$.

f) ...de la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

g) ...de la sphère de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 1.

3) Décrire implicitement l'ensemble décrit explicitement dans la question 1)m)...

a) ...en donnant une équation vérifiée par les points constituant cet objet géométrique.

b) ...en le décrivant comme une surface de niveau d'un certain champ scalaire.

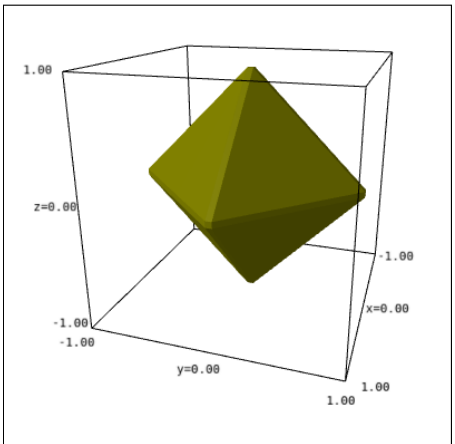
4) Décrire l'ensemble de la question 1)d) en tant que courbe de niveau d'un certain champ scalaire.

5) Quand un objet géométrique est décrit implicitement en tant qu'ensemble des solutions d'une équation, peut-on toujours le décrire comme une courbe de niveau 0 ou une surface de niveau 0 d'un champ scalaire ? Le cas échéant, comment faire ?

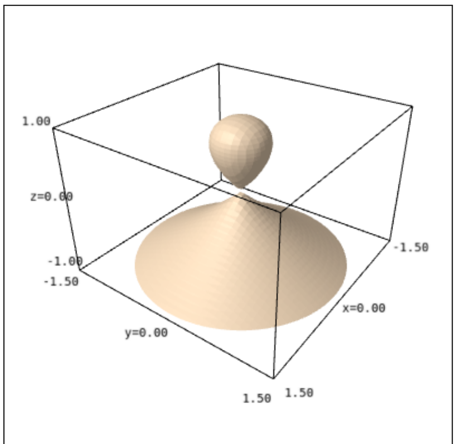
12.7 Visualiser des surfaces de niveau 0 de champ scalaire à trois variables

Associer chacun des champs scalaires suivants à la représentation graphique de sa courbe de niveau 0 :

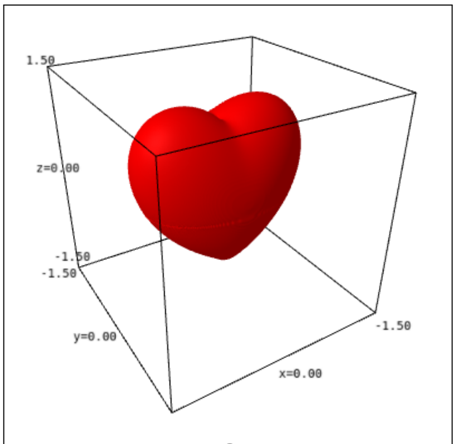
1) $f(x,y,z) = x^2 + y^8 + z^{14} + x^4y^2 - 1$
2) $f(x,y,z) = (x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - \frac{9}{80}y^2z^3$
3) $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 + z^2 - 1$
4) $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z| - 1$
5) $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^3 + z^2 - 1$
6) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (1-z)z^2$
7) $f(x,y,z) = (x^8 + z^{30} + y^8 - (x^4 + z^{50} + y^4 - \frac{3}{10}))(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2})$
8) $f(x,y,z) = (x^2+y^2-1)(x^2+z^2-1)(y^2+z^2-1) - 1$
9) $f(x,y,z) = z - \sqrt{y}e^x$



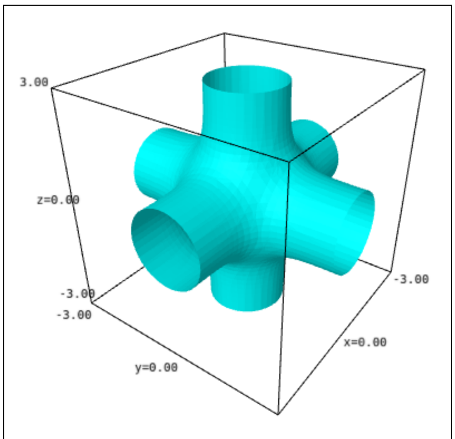
A



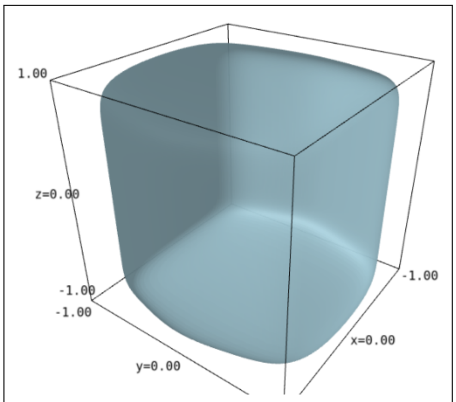
B



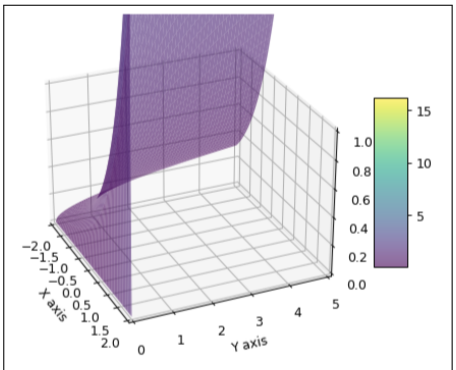
C



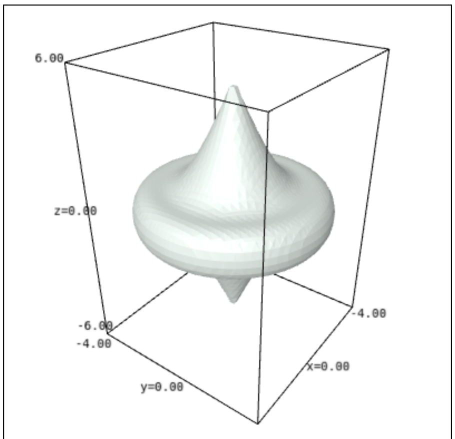
D



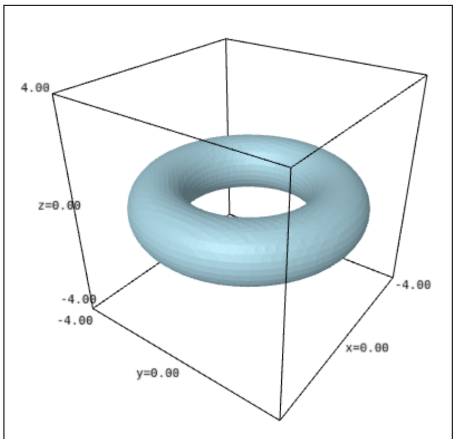
E



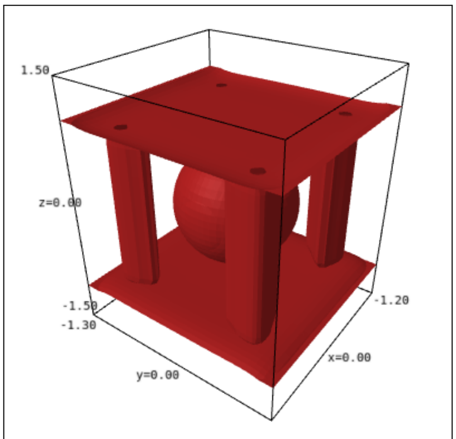
F



G



H



I