CORRECTION DES EXERCICES SUR LES OPÉRATEURS VECTORIELS QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

1 Recherche de potentiels scalaires (*section 6.3 question 2 du cours*) 2
1.1 Énoncé 2
1.2 Correction 2

2 Détermination et représentation des lignes d'un champ de vecteurs (*section 7.3 du cours*) 4
2.1 Énoncé 4
2.2 Correction 4

3 Calculer avec l'opérateur nabla (*section 9.2 du cours*) 9
3.1 Énoncé 9
3.2 Correction 9

4 Lignes d'un champ tourbillonnaire (*section 12.3 du cours*) 13
4.1 Énoncé 13
4.2 Correction 13

5 Propriétés des opérateurs vectoriels et définition du laplacien vectoriel (*section 12.5 question 2 du cours*) 17
5.1 Énoncé 17
5.2 Correction 17

1 Recherche de potentiels scalaires (*section 6.3 question 2 du cours*)

1.1 Énoncé

Démontrer que le champ de vecteur $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(2xy+z^3\right)\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j} + 3xz^2\overrightarrow{k}$ dérive d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont il dérive.

1.2 Correction

On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ telle $\overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$

Analyse :

On suppose qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ telle $\overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$.
Soit f une telle fonction.
On a :

$$\overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_x \\ -V_y \\ -V_z \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -V_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -V_y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -V_z \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -2xy - z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -3xz^2 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y,z) = -x^2y - xz^3 + g_1(y,z) \\ f(x,y,z) = -x^2y + g_2(x,z) \\ f(x,y,z) = -xz^3 + g_3(x,y) \end{array}\right.$$

$$f(x,y,z) = -x^2y - xz^3 + g_1(y,z) = -x^2y + g_2(x,z) = -xz^3 + g_3(x,y) \tag{1}$$

De (1), on déduit en particulier :

$$-x^2y - xz^3 + g_1(y,z) = -x^2y + g_2(x,z) \tag{2}$$

En ajoutant x^2y à chaque membre de (2) :

$$-xz^3 + g_1(y,z) = g_2(x,z) \tag{3}$$

En dérivant (3) par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xz^3 + g_1(y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g_2(x,z)\right) \tag{4}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xz^3\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g_1(y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g_2(x,z)\right) \tag{5}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-xz^3\right) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,z) \tag{6}$$

En intégrant (6) par rapport à x :

$$g_2(x,z) = -xz^3 + g_4(z) \tag{7}$$

De (1), on déduit en particulier :

$$-x^2y + g_2(x,z) = -xz^3 + g_3(x,y) \tag{8}$$

Via (7), on substitut $g_2(x,z)$ dans (7) :

$$-x^2y - xz^3 + g_4(z) = -xz^3 + g_3(x,y) \tag{9}$$

En ajoutant xz^3 à chaque membre de (9) :

$$-x^2y + g_4(z) = g_3(x,y) \tag{10}$$

En dérivant (10) par rapport à y :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2 y + g_4(z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(g_3(x,y)\right) \tag{11}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g_4(z)\right) = \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \tag{12}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2 y\right) = \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \tag{13}$$

En intégrant (13) par rapport à y :

$$g_3(x,y) = -x^2 y + g_5(x) \tag{14}$$

De (10) et (14), on déduit :

$$-x^2 y + g_4(z) = -x^2 y + g_5(x) \tag{15}$$
$$g_4(z) = g_5(x) \tag{16}$$

Donc g_4 est constante :

$$g_4(z) = C \qquad \text{(où } C \text{ est une constante)} \tag{17}$$

De (7) et (17), on déduit :

$$g_2(x,z) = -xz^3 + C \tag{18}$$

De (1) et (18), on déduit :

$$f(x,y,z) = -x^2 y - xz^3 + C \tag{19}$$

(On a démontré dans cette phase d'analyse que les seuls potentiels scalaires possibles de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions $f(x,y,z) = -x^2 y - xz^3 + C$ où C est une constante réelle. Cependant on n'a pas démontré que toutes les fonctions de cette forme sont des potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$. C'est l'objectif de la phase de synthèse que de déterminer parmis ces fonctions celles qui sont effectivement des potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$.)

Synthèse :
Soit $C \in \mathbb{R}$.
On note :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & -x^2 y - xz^3 + C \end{array}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2xy - z^3 \\ -x^2 \\ -3xz^2 \end{pmatrix} \\ &= -\overrightarrow{V} \end{aligned}$$

Conclusion de ce raisonnement par analyse-synthèse :
Les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & -x^2 y - xz^3 + C \end{array}$$

où C est une constante réelle.

2 Détermination et représentation des lignes d'un champ de vecteurs (*section 7.3 du cours*)

2.1 Énoncé

On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = 3x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

1) Déterminer les lignes de champ de $\overrightarrow{V}$.
2) Via *Python* et *Jupyter*, représenter graphiquement la ligne de champ qui passe par le point $(1,1)$.
3) Démontrer que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ tel que $\phi(0,0) = 0$.
4) Via *Python* et *Jupyter*, représenter graphiquement ce potentiel scalaire ϕ.
5) Comme dans l'avant-dernière figure de la section 7.1, via *Python* et *Jupyter*, représenter sur le même graphique le potentiel scalaire ϕ et la projection de la ligne de champ susmentionnée sur cette surface (i.e. les points $\big(x(t), y(t), \phi\big(x(t), y(t)\big)\big)$ où les $\big(x(t), y(t)\big)$ sont les points de cette ligne de champ).

2.2 Correction

1) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
On détermine la ligne du champ $\overrightarrow{V}$ qui passe par (x_0, y_0) en raisonnant par équivalence :

$t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ est la courbe paramétrée qui passe par (x_0, y_0) en t_0 et dont le vecteur dérivé en t est $\overrightarrow{V}(x(t), x(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} \big(x(t_0), y(t_0)\big) = (x_0, y_0) \\ \big(x'(t), y'(t)\big) = \big(3x(t), y(t)\big) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ x'(t) = 3x(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ \text{Il existe } C_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x(t) = C_1 e^{3t} \\ \text{Il existe } C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) = C_2 e^{t} \end{cases}$$

(En utilisant le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1.)

$$\iff \text{Il existe } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(t_0) = x_0 = C_1 e^{3t_0} \\ y(t_0) = y_0 = C_2 e^{t_0} \\ x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} C_1 = x_0 e^{-3t_0} \\ C_2 = y_0 e^{-t_0} \\ x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-3t_0} e^{3t} \\ y(t) = y_0 e^{-t_0} e^{t} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = x_0 e^{3(t-t_0)} \\ y(t) = y_0 e^{t-t_0} \end{cases}$$

(On aurait pu prendre $t_0 = 0$.)
La ligne du champ $\overrightarrow{V}$ qui passe par (x_0, y_0) est l'image de la courbe paramétrée γ suivante :

$$\gamma \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(x_0 e^{3t}, y_0 e^{t}\big) \end{array}$$

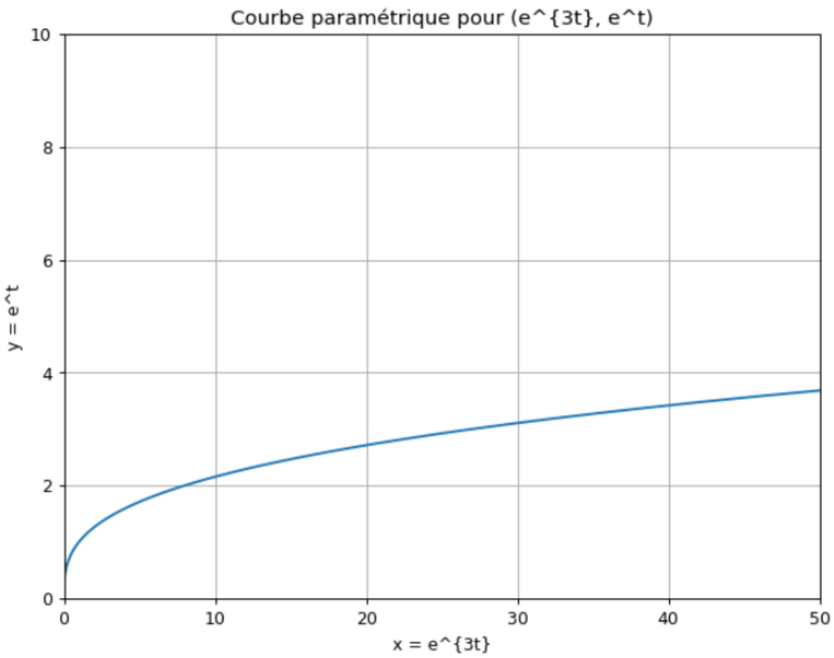
2) D'après la question précédente, la ligne de champ qui passe par $(1;1)$ est l'image de la courbe paramétrée γ suivante :

$$\gamma \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(e^{3t}, e^{t}\big) \end{array}$$

On la trace avec le programme *Python* suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définir les valeurs de t
t = np.linspace(-2, 2, 400)

# Calculer les valeurs de x et y en fonction de t
x = np.exp(3 * t)
y = np.exp(t)

# Créer la figure et l'axe
plt.figure(figsize=(8, 6))

# Tracer la courbe
plt.plot(x, y)

# Définir les titres et les étiquettes
plt.title('Courbe paramétrique pour (e^{3t}, e^t)')
plt.xlabel('x = e^{3t}')
plt.ylabel('y = e^t')
plt.grid(True)

# Ajuster les limites des axes pour une meilleure visualisation
plt.xlim(0, 50)
plt.ylim(0, 10)

# Afficher le graphique
plt.show()
```

Via *Jupyter*, on obtient :



3) On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer tous les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$.
<u>Analyse :</u>
On suppose qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ telle $\overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$.
Soit f une telle fonction.
On a :

$$f \text{ est un potentiel scalaire de } \overrightarrow{V} \iff \overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_x \\ -V_y \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -3x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} f(x,y) = -\frac{3}{2}x^2 + g_1(y) \\ f(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + g_2(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f(x,y) = -\frac{3}{2}x^2 + g_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + g_2(x) \tag{20}$$

En dérivant (20) par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^2 + g_1(y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}y^2 + g_2(x)\right) \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g_1(y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}y^2\right) + g_2'(x) \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^2\right) = g_2'(x) \tag{23}$$

En intégrant (23) par rapport à x :

$$g_2(x) = -\frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{(où } C \text{ est une constante réelle)} \tag{24}$$

De (20) et (24), on déduit :

$$f(x,y) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C \tag{25}$$

(On a démontré dans cette phase d'analyse que les seuls potentiels scalaires possibles de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions $f(x,y) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C$ où C est une constante réelle. Cependant on n'a pas démontré que toutes les fonctions de cette forme sont des potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$. C'est l'objectif de la phase de synthèse que de déterminer parmis ces fonctions celles qui sont effectivement des potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$.)

Synthèse :
Soit $C \in \mathbb{R}$.
On note :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C \end{array}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3x \\ -y \end{pmatrix} \\
&= -\overrightarrow{V}
\end{aligned}$$

Conclusion de ce raisonnement par analyse-synthèse :
Les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C \end{array}$$

où C est une constante réelle.
De plus, si f défini comme précédemment :

$$\begin{aligned}
f(0,0) = 0 &\iff -\frac{3}{2}0^2 - \frac{1}{2}0^2 + C = 0 \\
&\iff C = 0
\end{aligned}$$

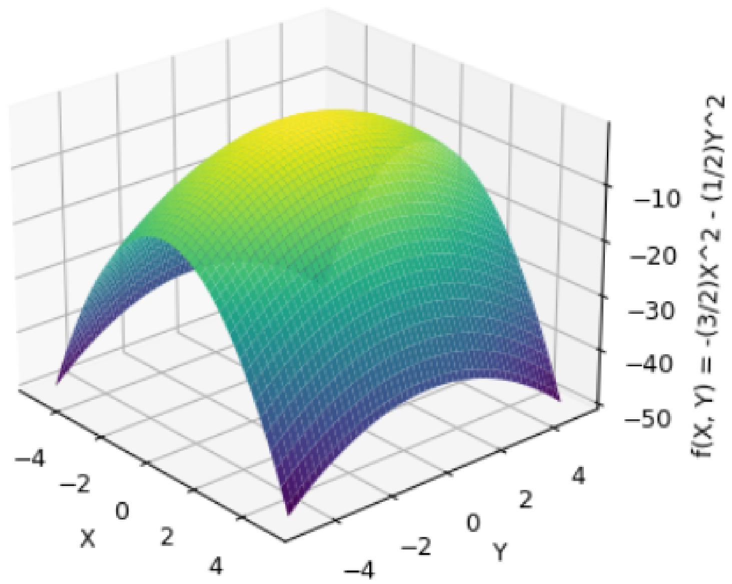
Donc il existe bien un potentiel scalaire f dont $\overrightarrow{V}$ dérive et tel que $f(0,0) = 0$. Il s'agit du champ scalaire suivant :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \end{array}$$

4) On trace le graphe du potentiel scalaire f de $\overrightarrow{V}$ qui envoie $(0,0)$ sur 0 défini dans la question précédente avec le programme *Python* suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Étape 1: Générer une grille de points pour x et y
x = np.linspace(-5, 5, 100)  # Crée 100 points entre -5 et 5 pour x
y = np.linspace(-5, 5, 100)  # Crée 100 points entre -5 et 5 pour y
X, Y = np.meshgrid(x, y)     # Crée une grille de coordonnées (X, Y)

# Étape 2: Calculer -f(x, y) = -(3/2)x^2 - (1/2)y^2 sur cette grille
Z = -(3/2) * X**2 - (1/2) * Y**2

# Étape 3: Visualiser avec un graphique en 3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

# Ajouter des étiquettes pour les axes
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('f(X, Y) = -(3/2)X^2 - (1/2)Y^2')

plt.show()
```

Via *Jupyter*, on obtient :

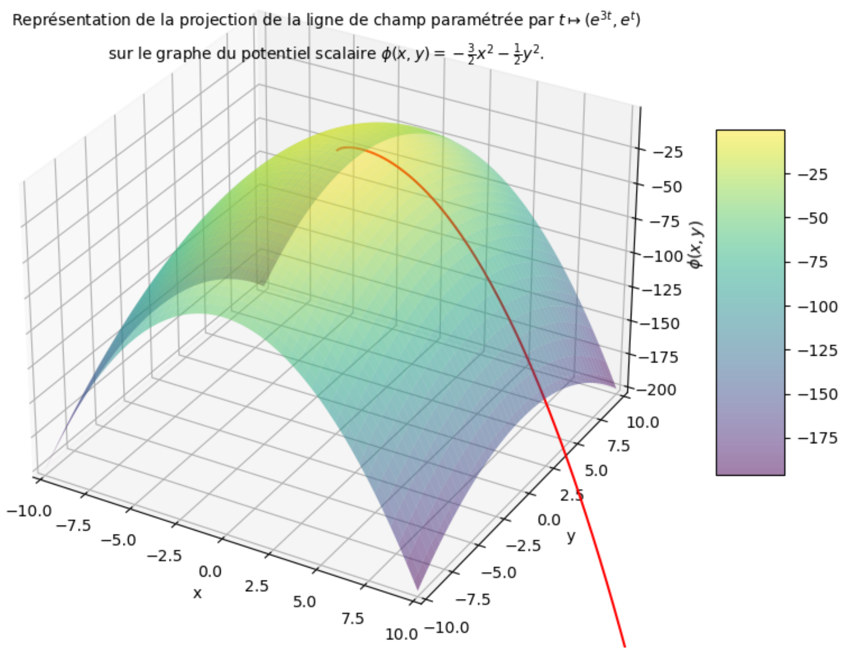


5) On représente sur le même graphique le potentiel scalaire f et la projection de la ligne de champ susmentionnée sur cette surface avec le programme *Python* suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Générer les points x et y sur une grille
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Définir le potentiel scalaire
Z = -(3/2) * X**2 - (1/2) * Y**2

# Créer la figure
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Créer le graphique 3D pour le potentiel scalaire
```

```
surface = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis', edgecolor='none', alpha=0.5)

# Ajouter une barre de couleur pour indiquer les valeurs du champ scalaire
fig.colorbar(surface, ax=ax, shrink=0.5, aspect=5)

# Ajuster les limites des axes pour mieux visualiser
ax.set_xlim([-10, 10])
ax.set_ylim([-10, 10])
ax.set_zlim([np.min(Z), np.max(Z)])

# Paramétrer la trajectoire pour la ligne de champ t -> (e^{3t}, e^t)
t = np.linspace(-2, 2, 400)
x_line = np.exp(3 * t)
y_line = np.exp(t)
z_line = -(3/2) * x_line**2 - (1/2) * y_line**2

# Tracer la ligne de champ sur le potentiel scalaire
ax.plot(x_line, y_line, z_line, 'r-', label=r'Ligne de champ $t \mapsto (e^{3t}, e^t)$')

# Ajouter des labels et un titre
ax.text2D(0.5, 0.9, "Représentation de la projection de la ligne de champ paramétrée par "
          r"$t\mapsto\left(e^{3t},e^{t}\right)$",
          transform=ax.transAxes, ha='center', fontsize=10)
ax.text2D(0.5, 0.85, r"sur le graphe du potentiel scalaire $\phi(x, y) = -\frac{3}{2}x^2 -\frac{1}{2} y^2$.",
          transform=ax.transAxes, ha='center', fontsize=10)

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel(r'$\phi(x, y)$')

# Afficher la figure
plt.show()
```

Via *Jupyter*, on obtient :



3 Calculer avec l'opérateur nabla (*section 9.2 du cours*)

3.1 Énoncé

Soient f un champ scalaire et $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs.

1) Pour chacune des écritures suivantes, dire si elle a un sens. Si tel est le cas, dire ce qu'elle désigne (Un nombre, un vecteur, un champ scalaire ou un champ vectoriel ?) et l'écrire sans utiliser ni la notation div ni la notation $\overrightarrow{grad}$.
   a) $div f$
   b) $div \overrightarrow{V}$
   c) $\overrightarrow{grad}\overrightarrow{V}$
   d) $\overrightarrow{\nabla}\cdot f$
   e) $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}$
   f) $\overrightarrow{\nabla} f$
   g) $\overrightarrow{grad} f$
   h) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$
   i) $div\overrightarrow{\nabla} f$
   j) $\overrightarrow{\nabla} div\overrightarrow{V}$
   k) $\overrightarrow{\nabla}\cdot div\overrightarrow{V}$
   l) $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{grad} f$
   m) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{grad} f$
   n) $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$
   o) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$
2) Calculer chacune des expressions précédentes qui ont un sens dans chacun des cas suivants :
   a) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(3x^2y+3\right)\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$
   b) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(3x^2y+3\right)\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$
   c) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{y}{x^3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{x^2}\overrightarrow{j}$
   d) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{y}{x^3}\overrightarrow{i} + \frac{1}{x^2}\overrightarrow{j}$
   e) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$
   f) $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$
   g) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$
   h) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(6x\sin(z) - y^3e^x\right)\overrightarrow{i} + \left(-3y^2e^x + \sin(y)\right)\overrightarrow{j} + 3x^2\cos(z)\overrightarrow{k}$
   i) $f(x,y,z) = \exp\left(x\cos(y) + \ln\left(1+z^2\right)\right)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$
   j) $f(x,y,z) = \exp\left(x\cos(y) + \ln\left(1+z^2\right)\right)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(6x\sin(z) - y^3e^x\right)\overrightarrow{i} + \left(-3y^2e^x + \sin(y)\right)\overrightarrow{j} + 3x^2\cos(z)\overrightarrow{k}$

3.2 Correction

1) a) $\cancel{div f}$
   b) $div\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ est un champ scalaire.
   c) $\cancel{\overrightarrow{grad}\overrightarrow{V}}$
   d) $\cancel{\overrightarrow{\nabla}\cdot f}$
   e) $\cancel{\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V}}$
   f) $\overrightarrow{\nabla} f$ est un champ de vecteurs.
   g) $\overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{\nabla} f$ est un champ de vecteurs.
   h) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ est un champ scalaire.
   i) $div\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla} f$ est un champ scalaire.
   j) $\overrightarrow{\nabla} div\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs.
   k) $\cancel{\overrightarrow{\nabla}\cdot div\overrightarrow{V}}$
   l) $\cancel{\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{grad} f}$
   m) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla} f$
   n) $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ est un champ scalaire.
   o) $\cancel{\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}}$ est un champ de vecteurs.
2) Il s'agit donc de calculer dans chacun des cas $\overrightarrow{\nabla} f$, $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla} f$, $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$.
   a) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(3x^2y+3\right)\overrightarrow{i} + x^3\overrightarrow{j}$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = 6x\left(y+1\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 6xy$$

$$\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \begin{pmatrix} 6y \\ 6x \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify
init_printing()
x, y = symbols('x y')
f = y*x**3 + 3*x*y**2 - 15*x - 12*y
grad_f = Matrix([simplify(diff(f, x)), simplify(diff(f, y))])
V = Matrix([3*x**2*y + 3, x**3])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y))
grad_div_V = Matrix([simplify(diff(div_V, x)), simplify(diff(div_V, y))])
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$x^3y + 3xy^2 - 15x - 12y$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} 3x^2y + 3 \\ x^3 \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$6x\left(y+1\right)$

Divergence de V:

$6xy$

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} 6y \\ 6x \end{bmatrix}$

b) $f\left(x,y\right) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ et $\vec{V}\left(x,y\right) = \left(3x^2y+3\right)\vec{i} + x^3\vec{j}$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{x^2y\left(x^2+3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{x^3\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{6xy(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 6xy$$

$$\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \begin{pmatrix} 6y \\ 6x \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify
init_printing()
x, y = symbols('x y')
f = x**3 * y / (x**2 + y**2)
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([3*x**2*y + 3, x**3])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$\frac{x^3y}{x^2+y^2}$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} 3x^2y + 3 \\ x^3 \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} \frac{x^2y\left(x^2+3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{x^3\left(x^2-y^2\right)}{x^4+2x^2y^2+y^4} \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$\frac{6xy\left(-x^2+y^2\right)}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

Divergence de V:

$6xy$

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} 6y \\ 6x \end{bmatrix}$

c) $f\left(x,y\right) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\vec{V}\left(x,y\right) = \frac{y}{x^3}\vec{i} + \frac{1}{x^2}\vec{j}$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = 6x\left(y+1\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{-3y}{x^4}$$

$$\vec{\nabla}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{12y}{x^5} \\ \frac{-3}{x^4} \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify
init_printing()
x, y = symbols('x y')
f = y*x**3 + 3*x*y**2 - 15*x - 12*y
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([y/(x**3), 1/x**2])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$x^3y + 3xy^2 - 15x - 12y$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} \frac{y}{x^3} \\ \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$6x\left(y+1\right)$

Divergence de V:

$-\frac{3y}{x^4}$

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} \frac{12y}{x^5} \\ -\frac{3}{x^4} \end{bmatrix}$

d) $f(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ et $\overrightarrow{V}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = 6x(y+1)$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify
init_printing()
x, y = symbols('x y')
f = y*x**3 + 3*x*y**2 - 15*x - 12*y
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([-y/(x**2+y**2), x/(x**2+y**2)])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$x^3y + 3xy^2 - 15x - 12y$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} 3x^2y + 3y^2 - 15 \\ x^3 + 6xy - 12 \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$6x(y+1)$

Divergence de V:

0

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) \\ xz\cos(xyz) \\ xy\cos(xyz) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \left(-x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2\right)\sin(xyz)$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify, sin
init_printing()
x, y, z = symbols('x y z')
f = sin(x*y*z)
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y), diff(f, z)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([-y*z, x*z, x*y])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y) + diff(V[2], z))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y), diff(div_V, z)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y) + diff(grad_f[2], z))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$\sin(xyz)$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} yz\cos(xyz) \\ xz\cos(xyz) \\ xy\cos(xyz) \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$\left(-x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2\right)\sin(xyz)$

Divergence de V:

0

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(6x\sin(z) - y^3 e^x\right)\overrightarrow{i} + \left(-3y^2 e^x + \sin(y)\right)\overrightarrow{j} + 3x^2\cos(z)\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) \\ xz\cos(xyz) \\ xy\cos(xyz) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla} f = \left(-x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2\right)\sin(xyz)$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = -3x^2\sin(z) - y^3e^x - 6ye^x + 6\sin(z) + \cos(y)$$

$$\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -6x\sin(z) - y^3e^x - 6ye^x \\ -3y^2e^x - 6e^x - \sin(y) \\ \left(6 - 3x^2\right)\cos(z) \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify, sin, cos, exp
init_printing()
x, y, z = symbols('x y z')
f = sin(x*y*z)
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y), diff(f, z)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([6*x*sin(z)-y**3*exp(x), -3*y**2*exp(x)+sin(y), 3*x**2*cos(z)])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y) + diff(V[2], z))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y), diff(div_V, z)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y) + diff(grad_f[2], z))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$\sin(xyz)$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} 6x\sin(z) - y^3e^x \\ -3y^2e^x + \sin(y) \\ 3x^2\cos(z) \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} yz\cos(xyz) \\ xz\cos(xyz) \\ xy\cos(xyz) \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$\left(-x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2\right)\sin(xyz)$

Divergence de V:

$-3x^2\sin(z) - y^3e^x - 6ye^x + 6\sin(z) + \cos(y)$

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} -6x\sin(z) - y^3e^x - 6ye^x \\ -3y^2e^x - 6e^x - \sin(y) \\ \left(6 - 3x^2\right)\cos(z) \end{bmatrix}$

g) $f(x,y,z) = \exp\left(x\cos(y) + \ln\left(1+z^2\right)\right)$ et $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \left(z^2+1\right)e^{x\cos(y)}\cos(y) \\ -x\left(z^2+1\right)e^{x\cos(y)}\sin(y) \\ 2ze^{x\cos(y)} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla} f = \left(x^2\left(z^2+1\right)\sin^2(y) - x\left(z^2+1\right)\cos(y) + \left(z^2+1\right)\cos^2(y) + 2\right)e^{x\cos(y)}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = 0$$

$$\overrightarrow{\nabla}\,\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```python
from sympy import symbols, diff, Matrix, init_printing, simplify, sin, cos, exp, log
init_printing()
x, y, z = symbols('x y z')
f = exp(x*cos(y)+log(1+z**2))
grad_f = Matrix([diff(f, x), diff(f, y), diff(f, z)]).applyfunc(simplify)
V = Matrix([-y*z, x*z, x*y])
div_V = simplify(diff(V[0], x) + diff(V[1], y) + diff(V[2], z))
grad_div_V = Matrix([diff(div_V, x), diff(div_V, y), diff(div_V, z)]).applyfunc(simplify)
laplacian_f = simplify(diff(grad_f[0], x) + diff(grad_f[1], y) + diff(grad_f[2], z))
print("Expression de f:");display(f)
print("Champ vectoriel V:");display(V)
print("Gradient de f:");display(grad_f)
print("Laplacien de f:");display(laplacian_f)
print("Divergence de V:");display(div_V)
print("Gradient de la divergence de V:");display(grad_div_V)
```

Expression de f:

$\left(z^2+1\right)e^{x\cos(y)}$

Champ vectoriel V:

$\begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{bmatrix}$

Gradient de f:

$\begin{bmatrix} \left(z^2+1\right)e^{x\cos(y)}\cos(y) \\ -x\left(z^2+1\right)e^{x\cos(y)}\sin(y) \\ 2ze^{x\cos(y)} \end{bmatrix}$

Laplacien de f:

$\left(x^2\left(z^2+1\right)\sin^2(y) - x\left(z^2+1\right)\cos(y) + \left(z^2+1\right)\cos^2(y) + 2\right)e^{x\cos(y)}$

Divergence de V:

0

Gradient de la divergence de V:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4 Lignes d'un champ tourbillonnaire (*section 12.3 du cours*)

4.1 Énoncé

On note :

$$\overrightarrow{V}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Calculer $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$.
2) $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ dérive-t-il d'un potentiel ?
3) Sans utiliser le théorème de caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel, démontrer par l'absurde que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.
4) En utilisant le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, démontrer que les lignes du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ sont les images des courbes paramétrées définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = A\left(\cos(t-\phi)\,\overrightarrow{i} + \sin(t-\phi)\,\overrightarrow{j}\right) \text{ où } A \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \phi \in [0;2\pi[$$

4.2 Correction

1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial_y} & V_y \\ \frac{\partial}{\partial_z} & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} & V_x \\ \frac{\partial}{\partial_z} & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} & V_x \\ \frac{\partial}{\partial_y} & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} & \text{(car } V_x \text{ et } V_y \text{ ne dépendent pas de } z\text{)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2) Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ (en assimilant $\overrightarrow{V}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ à $(x,y,z) \mapsto \overrightarrow{V}(x,y)$) et, d'après la question précédente, $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \neq 0$.
Donc, d'après le théorème de caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel, le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.
3) Démontrons que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas d'un potentiel sans utiliser le théorème de caractérisation par le rotationnel des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel.
Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{\nabla} f = -\overrightarrow{V}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_x \\ -V_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -V_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -V_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x \end{cases}$$
$$\begin{cases} f\left(x,y\right) = xy + g_1\left(y\right) \\ f\left(x,y\right) = -xy + g_2\left(x\right) \end{cases}$$

$$f\left(x,y\right) = xy + g_1\left(y\right) = -xy + g_2\left(x\right) \tag{26}$$

En dérivant par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + g_1\left(y\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-xy + g_2\left(x\right)\right) \tag{27}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g_1\left(y\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-xy\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(g_2\left(x\right)\right) \tag{28}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\right) + 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-xy\right) + g_2'\left(x\right) \tag{29}$$
$$g_2'\left(x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\right) \tag{30}$$
$$g_2\left(x\right) = 2xy + \text{cste} \tag{31}$$

De (26) et (31), on déduit :

$$f\left(x,y\right) = xy + \text{cste} \tag{32}$$

En dérivant par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \tag{33}$$

Ce qui est contradictoire avec :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \tag{34}$$

4) On détermine la ligne du champ $\overrightarrow{V}$ qui passe par $\left(x_0, y_0\right)$ en raisonnant par équivalence :

$t \mapsto \left(x(t), y(t)\right)$ est la courbe paramétrée qui passe par $\left(x_0, y_0\right)$ en 0 et dont le vecteur dérivé en t est $\overrightarrow{V}\left(x(t), x(t)\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\iff \begin{cases} \left(x(0), y(0)\right) = \left(x_0, y_0\right) \\ \left(x'(t), y'(t)\right) = \left(-y(t), x(t)\right) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x''(t) + x(t) = 0 \\ y''(t) + y(t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ \text{Il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tel que } x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ \text{Il existe } C, D \in \mathbb{R} \text{ tel que } y(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$$

(En utilisant le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.)

$$\iff \text{Il existe } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ (A\cos(t) + B\sin(t))' = -(C\cos(t) + D\sin(t)) \\ (C\cos(t) + D\sin(t))' = A\cos(t) + B\sin(t) \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ B\cos(t) - A\sin(t) = -C\cos(t) - D\sin(t) \\ D\cos(t) - C\sin(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ A = D \\ B = -C \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = -B\cos(t) + A\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \text{Il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} A = x_0 \\ -B = y_0 \\ x(t) = A\cos(t) + B\sin(t) \\ y(t) = -B\cos(t) + A\sin(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(t) = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ y(t) = y_0\cos(t) + x_0\sin(t) \end{cases}$$

Donc la ligne du champ $\overrightarrow{V}$ qui passe par (x_0, y_0) est l'image de la courbe paramétrée γ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \gamma & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ y_0\cos(t) + x_0\sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour finir, les formules trigonométriques d'addition suivantes vont nous permettre de factoriser cette expression :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (0,0)$.
Supposons que $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
On note A la norme euclidienne du vecteur (x_0, y_0) (ou le module du nombre complexe $x_0 + i y_0$) :

$$A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

On note ϕ l'unique élément de $[0; 2\pi[$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0 + i y_0 = Ae^{i\phi} = A\left(\cos(\phi) + i.\sin(\phi)\right) = A\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(\phi) \\ A\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x_0 = A\cos(\phi) \\ y_0 = A\sin(\phi) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(t) &= \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ y_0\cos(t) + x_0\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A\cos\left(\phi\right)\cos(t) - A\sin\left(\phi\right)\sin(t) \\ A\sin\left(\phi\right)\cos(t) + A\cos\left(\phi\right)\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= A\begin{pmatrix} \cos\left(\phi\right)\cos(t) - \sin\left(\phi\right)\sin(t) \\ \sin\left(\phi\right)\cos(t) + \cos\left(\phi\right)\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= A\begin{pmatrix} \cos\left(t+\phi\right) \\ \sin\left(t+\phi\right) \end{pmatrix} \\
&= A\left(\cos\left(t+\phi\right)\overrightarrow{i} + \sin\left(t+\phi\right)\overrightarrow{j}\right)
\end{aligned}
$$

L'image de γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

5 Propriétés des opérateurs vectoriels et définition du laplacien vectoriel (*section 12.5 question 2 du cours*)

5.1 Énoncé

Définition (Laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs).
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs. On note $\Delta\overrightarrow{V}$ et on appelle laplacien vectoriel du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs suivant :

$$\Delta\overrightarrow{V} = \Delta V_x \overrightarrow{i} + \Delta V_y \overrightarrow{j} + \Delta V_z \overrightarrow{k}$$

Soient $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^2$ et ϕ un champ scalaire de classe $\mathscr{C}^1$.
Démontrer que :

1) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\phi\overrightarrow{V}\right) = \phi\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) + \left(\overrightarrow{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{V}$
2) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right) = \left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{U}\right)\cdot\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right)$
3) $\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) = \Delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right)$
4) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}\right) = 0$

5.2 Correction

1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\phi\overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\left(\phi.\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\phi.V_x\\ \phi.V_y\\ \phi.V_z\end{pmatrix}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi.V_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi.V_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\phi.V_z\right)\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}.V_x + \phi.\frac{\partial V_x}{\partial x}\\
&\quad + \frac{\partial\phi}{\partial y}.V_y + \phi.\frac{\partial V_y}{\partial y}\\
&\quad + \frac{\partial\phi}{\partial z}.V_z + \phi.\frac{\partial V_z}{\partial z}\\
&= \phi.\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\\
&\quad + \frac{\partial\phi}{\partial x}.V_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}.V_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}.V_z\\
&= \phi.\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) + \begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}\\
&= \phi.\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}\right) + \left(\overrightarrow{\nabla}\phi\right)\cdot\overrightarrow{V}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}U_x\\ U_y\\ U_z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}U_y & V_y\\ U_z & V_z\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}U_x & V_x\\ U_z & V_z\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}U_x & V_x\\ U_y & V_y\end{vmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_y V_z\left(x,y,z\right) - U_z V_y \\ -\left(U_x V_z - U_z V_x\right) \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(U_y V_z - U_z V_y\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(U_x V_z - U_z V_x\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(U_x V_y - U_y V_x\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(U_y V_z\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(U_z V_y\right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(U_x V_z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U_z V_x\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(U_x V_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(U_y V_x\right) \\
&= \frac{\partial U_y}{\partial x} V_z + U_y \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial U_z}{\partial x} V_y - U_z \frac{\partial V_y}{\partial x} \\
&\quad - \frac{\partial U_x}{\partial y} V_z - U_x \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial y} V_x + U_z \frac{\partial V_x}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial U_x}{\partial z} V_y + U_x \frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial U_y}{\partial z} V_x - U_y \frac{\partial V_x}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) V_x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) V_y + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right) V_z \\
&\quad - U_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - U_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) - U_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}\right) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}\right)
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \Delta \overrightarrow{V} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} \\
&= 0
\end{aligned}$$