

EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LES OSCILLATEURS HARMONIQUES

S. Labopin

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Définition d'un oscillateur harmonique	2
1.2	Exemples d'oscillateurs harmoniques et tour d'horizon des comportements oscillatoires dans le cas mécanique	2
1.2.1	Oscillateur non amorti et libre	2
1.2.2	Oscillateur harmonique non amorti et forcé	3
1.2.3	Oscillateur harmonique amorti et libre	5
1.2.4	Oscillateur harmonique amorti et forcé	6
1.3	Conventions de notation de ce document et heuristique	7
2	Étude des fonctions décrivant le mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti et libre	8
2.1	Expressions générales	8
2.1.1	Somme de fonctions trigonométriques « $y(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ »	8
2.1.2	Forme factorisée « $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ »	9
2.2	Fonctions cosinusoidales, amplitude, pulsation propre, fréquence angulaire et phase initiale	10
2.3	Représentation graphique des fonctions cosinusoidales	11
2.3.1	Lecture graphique de l'amplitude, de la période et du décalage temporel	11
2.3.2	Détermination de la période par le calcul	11
2.3.3	Détermination du décalage temporel par le calcul	12
2.3.4	Estimation de la phase initiale d'une fonction cosinusoidale à partir de sa représentation graphique	13
2.4	Utilisation des nombres complexes	14
2.4.1	Phaseurs et correspondance bijective entre les fonctions coisinusoïdales et les phaseurs	14
2.4.2	Applications à l'étude des sommes de fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire	16
2.4.2.1	Pour les étudiants qui veulent aller plus loin en comprenant comment une grande abstraction mathématique peut s'appliquer très concrètement : Isomorphisme p_μ entre l'espace des fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire et \mathbb{C}	16
2.4.2.2	Déterminer l'amplitude et la phase initiale d'une somme de fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire	17
3	Oscillateur harmonique non amorti et libre	18
3.1	Cas général	18
3.2	Exemple	18
4	Oscillateur harmonique non amorti et forcé	19
4.1	Cas général	19
4.2	Forçage constant	20
4.3	Forçage cosinusoidal et résonance	20
4.3.1	Premier cas : La pulsation propre du forçage est différente de la pulsation propre de l'oscillateur (absence de résonance)	21
4.3.2	Deuxième cas : La pulsation propre du forçage est égale à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance)	21
5	Oscillateur harmonique amorti et libre	22
5.1	Cas général et coefficient d'amortissement critique	22
5.1.1	Oscillateur harmonique libre sous-amorti	23
5.1.2	Oscillateur harmonique libre critiquement amorti	23
5.1.3	Oscillateur harmonique libre sur-amorti	23
5.2	Exemples	24
6	Oscillateur harmonique amorti et forcé	24
7	Application à l'étude des circuits électriques RLC	25
7.1	Définition	25
7.2	Oscillateur harmonique amorti non forcé : Circuit RLC en série sans générateur avec condensateur chargé initialement	25
7.3	Oscillateur harmonique amorti et forcé : Circuit RLC en parallèle avec générateur et avec condensateur non chargé initialement	27
7.3.1	Avec un forçage constant : Avec un générateur délivrant un courant continu	27
7.3.2	Avec un forçage cosinusoidal : Avec un générateur délivrant un courant alternatif	27
7.4	Oscillateur harmonique non amorti et libre : Circuit théorique LC sans générateur et avec condensateur chargé initialement	28

1 Introduction

1.1 Définition d'un oscillateur harmonique

Définition (Oscillateur harmonique)

Un **oscillateur harmonique** est un système qui, lorsqu'il est déplacé de sa **position d'équilibre**, subit une force restauratrice qui est proportionnelle au déplacement par rapport à cette position, pouvant également inclure des forces de résistance (**amortissement**) et/ou des forces externes (**forçage**).

Ce **comportement** est **décrit par une équation différentielle** linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

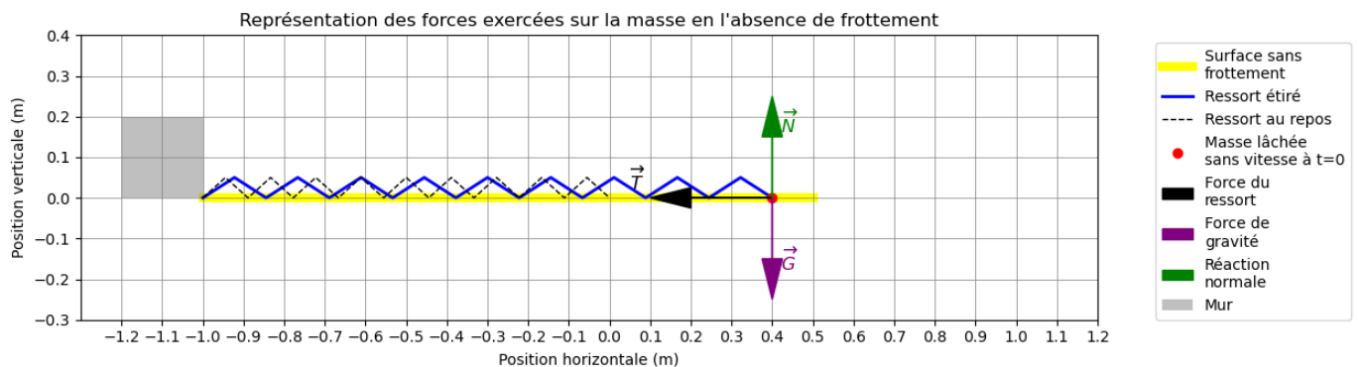
où :

- $y(t)$ est la **position** du système par rapport à sa position d'équilibre.
- $y'(t)$ est la **vitesse**, dérivée première de la position $y(t)$ par rapport au temps.
- $y''(t)$ est l'**accélération**, dérivée seconde de la position $y(t)$ par rapport au temps.
- b est une constante positive appelée **coefficient d'amortissement** (nul pour un oscillateur non amorti).
- c est une constante strictement positive qui détermine la **force de rappel**, typiquement proportionnelle à la constante de raideur du système.
- $g(t)$ est le **forçage**, une fonction du temps représentant une force extérieure appliquée qui peut être nulle pour un système non forcé (libre).

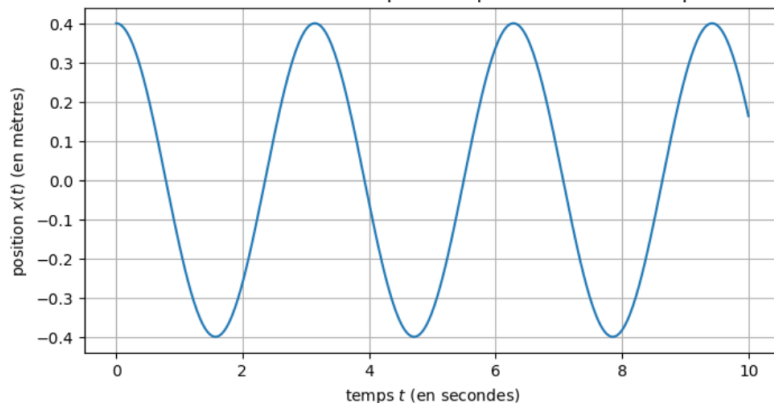
1.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques et tour d'horizon des comportements oscillatoires dans le cas mécanique

1.2.1 Oscillateur non amorti et libre

- Une masse de 2 kg attachée à un ressort vertical de constante de raideur $k = 8 \text{ N/m}$ et de longueur au repos de 1 m fixé à l'autre extrémité à un mur fixe, le tout sur une surface horizontale **sans frottement** (voir partie I de « [Étude de cas sur les équations différentielles](#) » sur le site dans « Tests type TOMIC »). La position de la masse oscille autour de la position constante qu'elle aurait si le ressort n'avait pas été comprimé ou étiré. Ce mouvement oscillatoire **n'est causé que par la force du ressort** qui suit la loi de Hooke qui stipule que la force exercée par un ressort est **proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort** par rapport à sa longueur au repos.



Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée

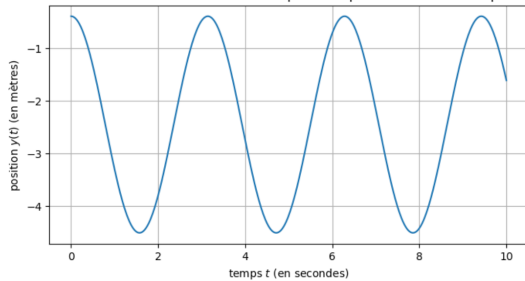


Ce système est étudié dans la [section « Oscillateur harmonique non amorti et libre »](#).

1.2.2 Oscillateur harmonique non amorti et forcé

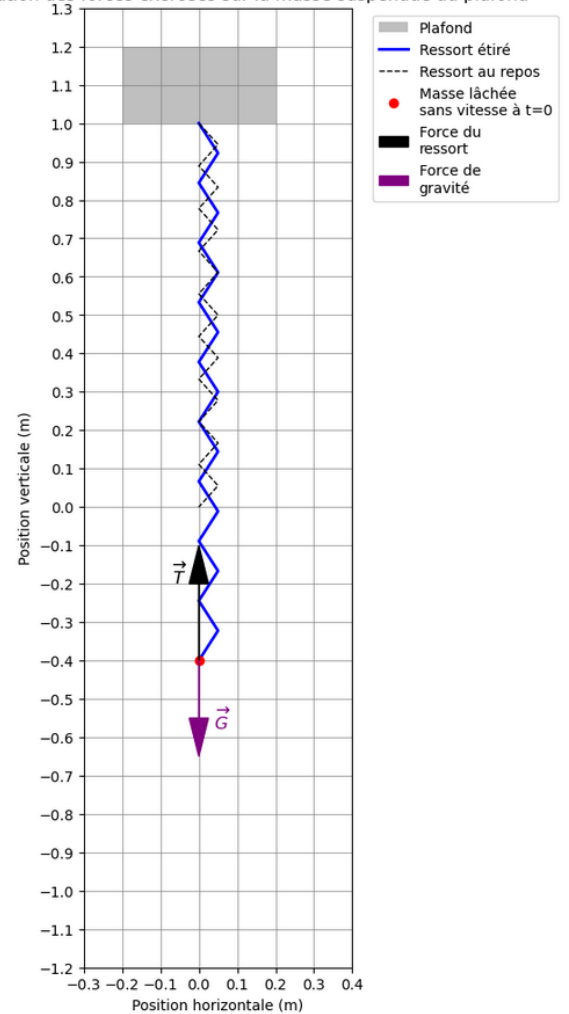
- Une masse de 2 kg attachée à un ressort vertical de constante de raideur $k = 8\text{ N/m}$ et de longueur au repos de 1 m fixé à l'autre extrémité à un plafond fixe **en négligeant les frottements** de l'air. Le **forçage** est effectué par le poids de la masse. Contrairement au système d'oscillateur non amorti et libre précédent où la force de gravité est effectivement neutralisée par la force normale agissant perpendiculairement à la direction de l'oscillation, dans ce système vertical, le poids de la masse contribue directement à la dynamique de l'oscillation. Cette force de gravité constitue un forçage constant qui influence l'amplitude et la période des oscillations.

Position verticale de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée



Ce système est étudié dans la sous-section « Forçage constant » de la section « Oscillateur harmonique non amorti et forcé ».

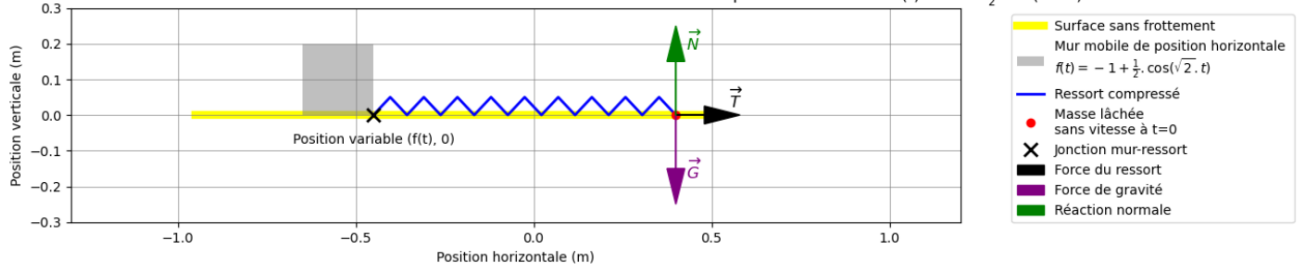
Représentation des forces exercées sur la masse suspendue au plafond

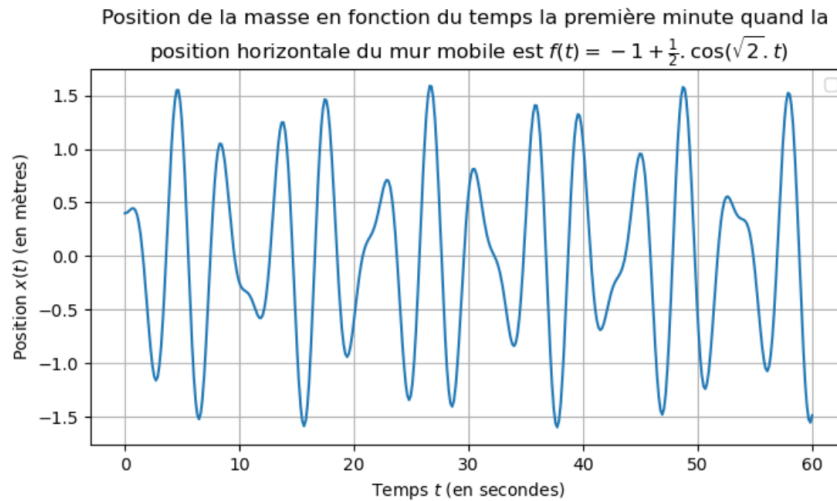


- Une masse de 2 kg attachée à un ressort de constante de raideur $k = 8\text{ N/m}$ et de longueur au repos de 1 m qui est fixé à l'autre extrémité à un mur mobile, le tout sur une surface horizontale **sans frottement**. Dans ce cas, le **forçage** correspond au mouvement du mur. Dans les schémas suivant, on s'intéresse à deux mouvements du mur de la forme $f(t) = -1 + \frac{1}{2} \cos(\mu t)$ qui correspondent à des vibrations de ce mur suivant deux fréquences différentes.

Pour $\mu = \sqrt{2}$, on constate que le forçage perturbe le mouvement de la masse sans pour autant amener le système jusqu'à la rupture :

Représentation des forces exercées sur la masse en l'absence de frottement avec mur mobile de position horizontale $f(t) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot t)$

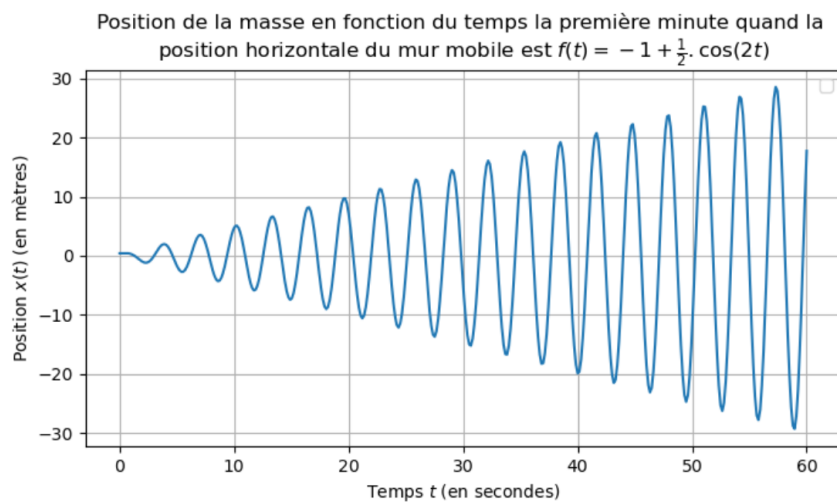
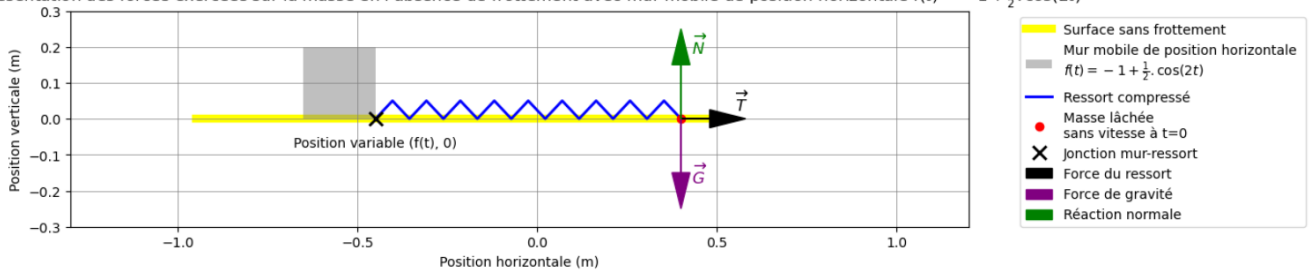




Ce système est étudié dans la sous-section « Premier cas : La pulsation propre du forçage est différente de la pulsation propre de l'oscillateur (absence de résonance) » de la section « Forçage cosinusoidal et résonance »

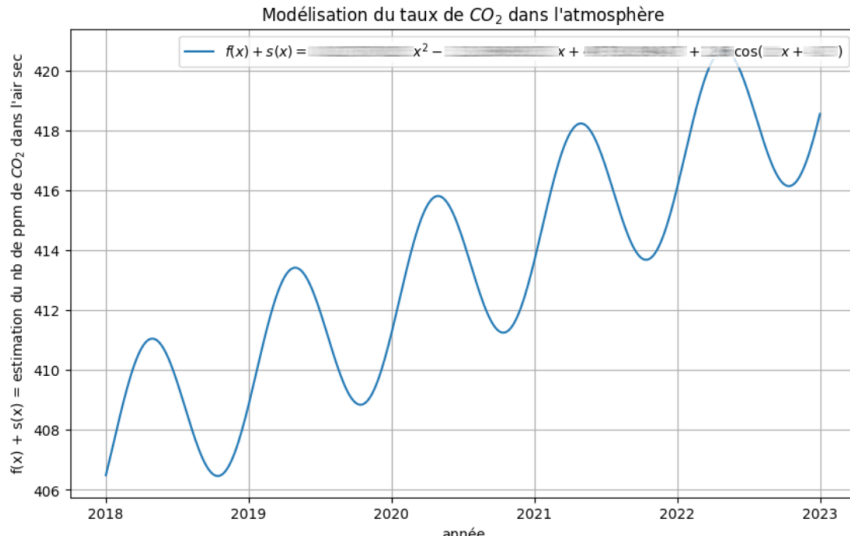
Mais lorsque $\mu = 2$, on constate un phénomène d'amplification amenant le système jusqu'à la rupture :

Représentation des forces exercées sur la masse en l'absence de frottement avec mur mobile de position horizontale $f(t) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \cos(2t)$



Ce système est étudié dans la sous-section « Deuxième cas : La pulsation propre du forçage est égale à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance) » de la section « Forçage cosinusoidal et résonance »

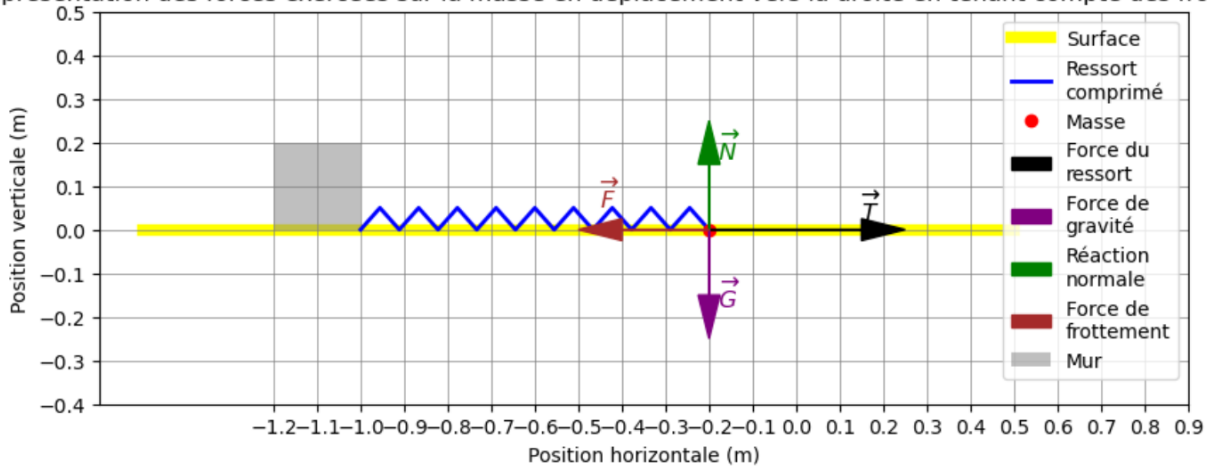
- La modélisation du taux de CO_2 choisie dans le document du site « Test type TOMIC sur les oscillateurs harmoniques (intégrant un TP de traitement de données) » dans « Tests type TOMIC ». Ce taux augmente en oscillant au cours du temps. En l'absence d'activité humaine, ce taux se comporterait comme un oscillateur non amorti et libre suivant les phénomènes naturels saisonniers. Comme ce forçage est dû aux activités humaines, on l'appelle le « forçage anthropique ».



1.2.3 Oscillateur harmonique amorti et libre

- Une masse de 2 kg attachée à un ressort de constante de raideur $k = 8\text{ N/m}$ et de longueur au repos de 1 m qui est fixé à l'autre extrémité à un mur fixe, le tout sur une surface horizontale dont **on tient compte des frottements** (voir partie II de « Étude de cas sur les équations différentielles » sur le site dans « Tests type TOMIC ») :

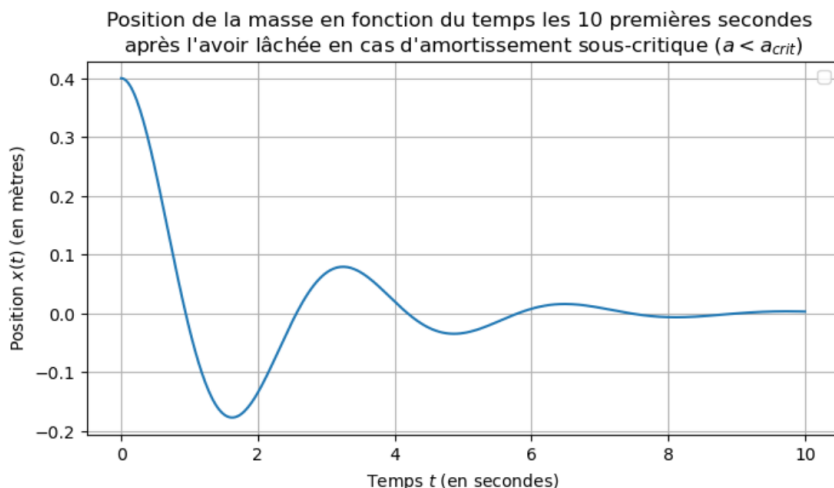
Représentation des forces exercées sur la masse en déplacement vers la droite en tenant compte des frottements



Dans ce cas, le système revient à sa position d'équilibre.

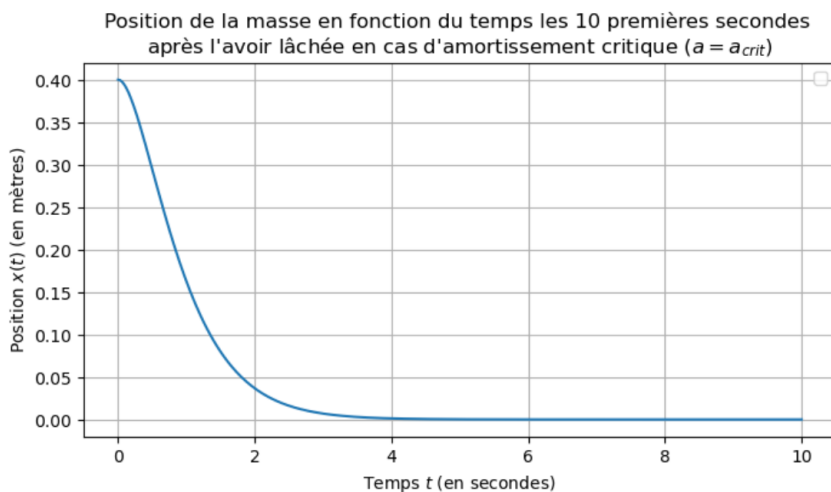
Il y a trois types de retour à la position d'équilibre suivant la valeur du coefficient d'amortissement a par rapport à une certaine valeur critique a_{crit} :

- 1^{er} cas : $a < a_{crit}$; on parle d'**amortissement sous-critique**



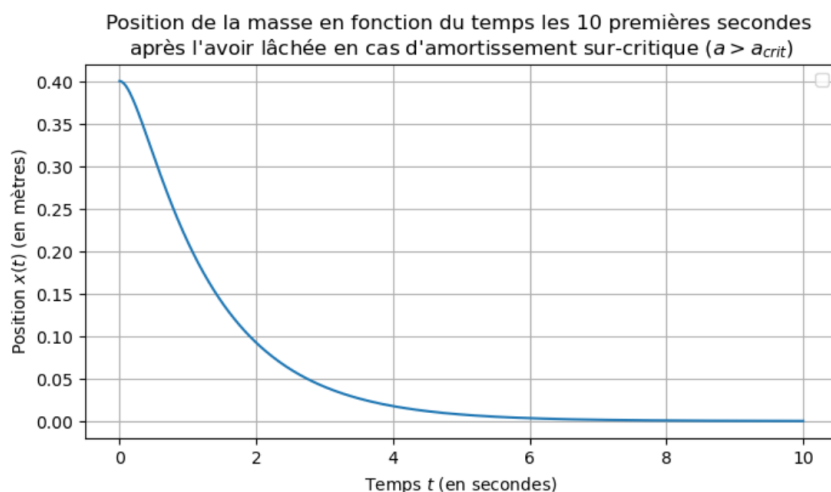
On étudie un exemple d'amortissement sous-critique dans la partie II de l'« Étude de cas sur les équations différentielles » sur le site dans « Tests type TOMIC ».

- 2^{ème} cas : $a = a_{crit}$; on parle d'**amortissement critique**



On étudie un exemple d'amortissement critique dans les questions 2)b), 3) et 4) de la sous-section « Exemples » de la section « Oscillateur harmonique amorti et libre ».

- 3^{ème} cas : $a > a_{crit}$; on parle d'**amortissement sur-critique**



On étudie un exemple d'amortissement sur-critique dans les questions 2)a), 3) et 4) de la sous-section « Exemples » de la section « Oscillateur harmonique amorti et libre ».

- L'intensité électrique en un point d'un circuit électrique RLC non alimenté en courant électrique par un générateur.

1.2.4 Oscillateur harmonique amorti et forcé

- Une masse attachée à un ressort qui est fixé à l'autre extrémité à un mur mobile, le tout sur une surface horizontale dont on tient compte des frottements.
- L'intensité électrique en un point d'un circuit électrique RLC alimenté en courant électrique par un générateur.

1.3 Conventions de notation de ce document et heuristique

Dans tout ce document :

- I désigne un intervalle réel.
- On résout des équations différentielles de la forme $y'' + by' + cy = g$ où $b \geq 0$, $c > 0$ et où le second membre $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles.

Autrement dit, on cherche toutes les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables où I est un intervalle de \mathbb{R} et telles que :

$$\forall t \in I, y''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

- On peut penser que ces équations régissent l'évolution d'une grandeur physique au cours du temps (taux de CO_2 dans l'atmosphère vers l'observatoire de l'Observatoire de Mauna Loa, une coordonnée d'un point matériel repéré dans l'espace, l'intensité du courant électrique en un point d'un circuit électrique). On peut donc aussi penser « la variable souvent noté t » comme le temps et chacune des valeurs qu'elle prend comme des instants.
- On peut donc en définitive penser chacune des solutions recherchées comme une fonction qui associe à un instant t la valeur d'une grandeur physique $y(t)$.

2 Étude des fonctions décrivant le mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti et libre

2.1 Expressions générales

Quand un oscillateur n'est ni forcé ni amorti, le **coefficient d'amortissement et le forçage sont nuls** (Ils sont notés « b » et « $g(t)$ » dans la [première définition](#)).

Son comportement (i.e. sa position en fonction du temps) est donc décrit par (i.e. est une solution de) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

où ω (noté \sqrt{c} dans la [première définition](#)) est une constante strictement positive (que l'on appellera bientôt « pulsation propre »).

2.1.1 Somme de fonctions trigonométriques « $y(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ »

Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants, on utilise la section « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « [Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles](#) ».

L'équation caractéristique associée est l'équation suivante d'inconnue x :

$$x^2 + \omega^2 = 0$$

Le **discriminant** $\Delta = -4\omega^2$ du trinôme $x^2 + 0 \cdot x + \omega^2$ est **strictement négatif** et **les solutions de l'équation caractéristique sont les deux nombres complexes conjugués** suivant :

$$\frac{-0 - i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \boxed{0 - i \cdot \omega} \qquad \frac{-0 + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \boxed{0 + i \cdot \omega}$$

Donc l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H^{\mathbb{R}} &= \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{ut} (C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt)) \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ où } u = 0 \text{ et } v = \omega \\ &= \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{0 \cdot t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \end{array} , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

En définitive :

Proposition (Expression générale développée de la position de l'oscillateur harmonique non amorti, libre et de pulsation propre ω en fonction du temps)

La fonction f qui modélise la position de l'oscillateur harmonique non amorti, libre et de pulsation propre ω en fonction du temps est de la forme suivante :

$$f(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \text{ avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux constantes réelles}$$

2.1.2 Forme factorisée « $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ »

Méthode (Factoriser une expression de la forme $x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u)$)

Pour factoriser $x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u)$:

- On écrit le nombre complexe $x + i \cdot y$ sous forme trigonométrique :

$$x + i \cdot y = r e^{i\theta} = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

- On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

- On remplace x et y par ces nouvelles expressions :

$$x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u) = r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(u) + r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(u)$$

- On factorise par r (i.e. le module du nombre complexe $x + i \cdot y$) :

$$x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u) = r \cdot (\cos(\theta) \cdot \cos(u) + \sin(\theta) \cdot \sin(u))$$

- On applique la formule de trigonométrie $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$:

$$x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u) = r \cdot \cos(u - \theta)$$

Exemple (Factoriser une expression de la forme $x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u)$)

On souhaite factoriser $2\sqrt{3} \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$:

- On écrit le nombre complexe $2\sqrt{3} + 2i$ sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} |2\sqrt{3} + 2i| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4 \\ 2\sqrt{3} + 2i &= 4 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}i \right) = 4 \cdot \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{6})} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin(\frac{\pi}{6})} i \right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4 \cdot (\cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6})) \end{aligned}$$

- On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = 4 \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) \\ 2 = 4 \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

- On remplace $2\sqrt{3}$ et 2 respectivement par $4 \cdot \cos(\frac{\pi}{6})$ et $4 \cdot \sin(\frac{\pi}{6})$:

$$2\sqrt{3} \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x) = 4 \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) \cdot \cos(x) + 4 \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) \cdot \sin(x)$$

- On factorise par 4 (i.e. le module $|2\sqrt{3} + 2i|$) :

$$2\sqrt{3} \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x) = 4 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) \cdot \cos(x) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cdot \sin(x) \right)$$

- On applique la formule de trigonométrie $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$:

$$2\sqrt{3} \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x) = 4 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

1) Factoriser comme dans l'exemple les expressions suivantes. Pour la dernière, penser à utiliser arccos, arcsin ou arctan.

a) $\sqrt{3} \cos(3t) + \sin(3t)$

b) $\cos(5t) + \sqrt{3} \sin(5t)$

c) $\cos(t) - \sin(t)$

d) $4 \cos(x) + 12 \sin(x)$

2) En admettant que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, déterminer $(A, \phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$2\sqrt{5 - \sqrt{5}} \cos(x) + (\sqrt{2} + \sqrt{10}) \sin(x) = A \cos(x + \phi)$$

Ainsi, avec cette utilisation des nombres complexes et de la trigonométrie, on peut écrire une expression de la forme « $C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ » avec une expression de la forme « $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ » et inversement.

On peut donc décrire la position de l'oscillateur harmonique non amorti, libre et de pulsation propre ω en fonction du temps avec cette dernière expression qui, comme on le voit dans les sections suivantes, s'interprète beaucoup plus concrètement :

Proposition (Expression cosinusoidale de la position de l'oscillateur harmonique non amorti, libre et de pulsation propre ω en fonction du temps)

La fonction f qui modélise la position de l'oscillateur harmonique non amorti, libre et de pulsation propre ω en fonction du temps est de la forme suivante :

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \psi), \text{ avec } A \geq 0 \text{ et } \psi \in [0; 2\pi[$$

3) Écrire la solution des problèmes de Cauchy suivants sous la forme « $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ » avec $A \geq 0$ et $\phi \in [0; 2\pi[$. Penser à utiliser \tan et même \arctan pour la dernière.

a)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2.2 Fonctions cosinusoidales, amplitude, pulsation propre, fréquence angulaire et phase initiale

Définitions (fonction cosinusoidale, amplitude, pulsation propre, fréquence angulaire et phase initiale)

On appelle **fonction cosinusoidale** une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

où :

- $A \geq 0$ est appelé l'**amplitude**.
- $\omega > 0$ est appelé la **pulsation propre** ou la **fréquence angulaire**.
- $\phi \in [0; 2\pi[$ est appelé la **phase initiale**.

1) Démontrer que $t \mapsto 3 \cos(\pi(3 - \pi t))$ est une fonction cosinusoidale et déterminer son amplitude, sa fréquence angulaire et sa phase initiale (appartenant à $[0; 2\pi[$).

2) Démontrer que $t \mapsto -\sin(t)$ est une fonction cosinusoidale et déterminer son amplitude, sa fréquence angulaire et sa phase initiale (appartenant à $[0; 2\pi[$).

3) On reprend l'exemple de la partie I) du **test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles »** (le cinquième sur le site).

- Quelles sont l'amplitude, la pulsation propre et la phase initiale de la position $x(t)$ de la masse obtenue dans la question I)2)c)?
- Utiliser *Python* et *Jupyter* pour la tracer.
- À quoi correspond l'amplitude sur le graphique?
- Comment aurait été ce graphique si la phase initiale avait été différente?
- Vérifier en traçant la fonction cosinusoidale ayant la même amplitude et la même pulsation propre mais ayant une phase initiale qui vaut $\frac{\pi}{3}$.

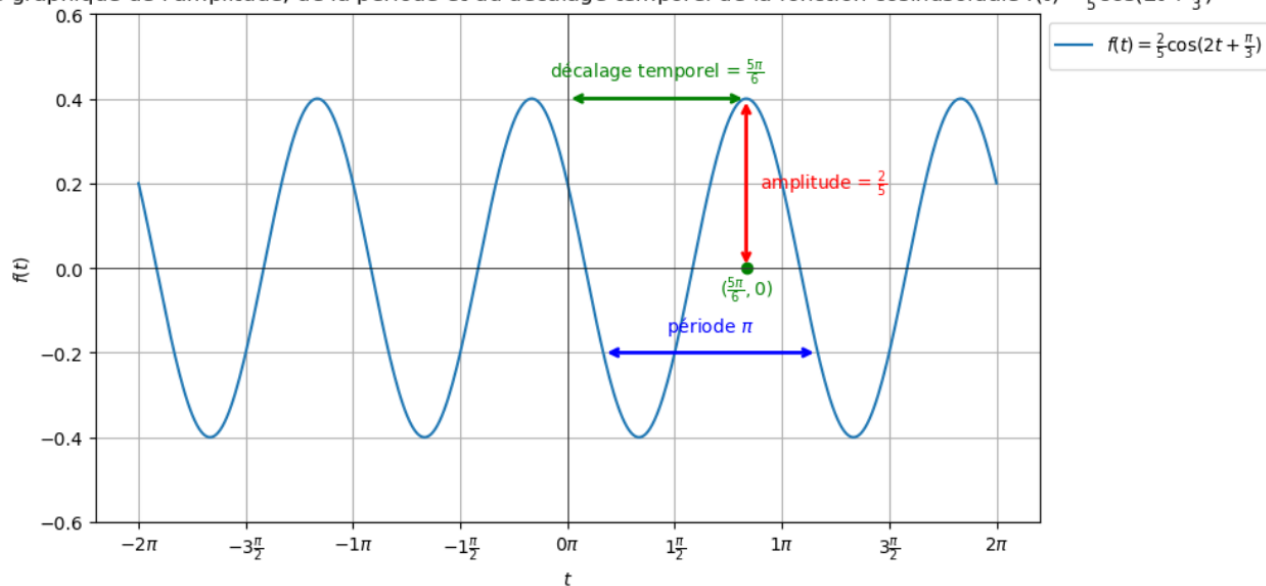
2.3 Représentation graphique des fonctions cosinusoidales

2.3.1 Lecture graphique de l'amplitude, de la période et du décalage temporel

Sur la représentation graphique de la fonction cosinusoidale $f : t \mapsto \frac{2}{5} \cos(2t + \frac{\pi}{3})$, on lit aisément ses trois caractéristiques suivantes :

- **L'amplitude** :
C'est le maximum de la fonction f .
- La **période** :
C'est le plus petit réel strictement positif T tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t + T) = f(t)$.
- Le **décalage temporel** (entre f et la fonction cosinusoidale obtenue depuis f en remplaçant sa phase initiale par 0) :
C'est le plus petit réel positif s tel que $f(s)$ soit maximal.

Lecture graphique de l'amplitude, de la période et du décalage temporel de la fonction cosinusoidale $f(t) = \frac{2}{5} \cos(2t + \frac{\pi}{3})$



2.3.2 Détermination de la période par le calcul

Méthode (Déterminer la période de $f : t \mapsto A \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$)

On cherche le plus petit réel positif T tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t + T) = f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t + T) = f(t) &\Leftrightarrow A \cdot \cos(\omega \cdot (t + T) + \psi) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \\ &\Leftrightarrow A \cdot \cos(\omega \cdot t + \omega \cdot T + \psi) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \\ &\Leftrightarrow \omega \cdot t + \omega \cdot T + \psi \equiv \omega \cdot t + \psi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \omega \cdot T \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \omega \cdot T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

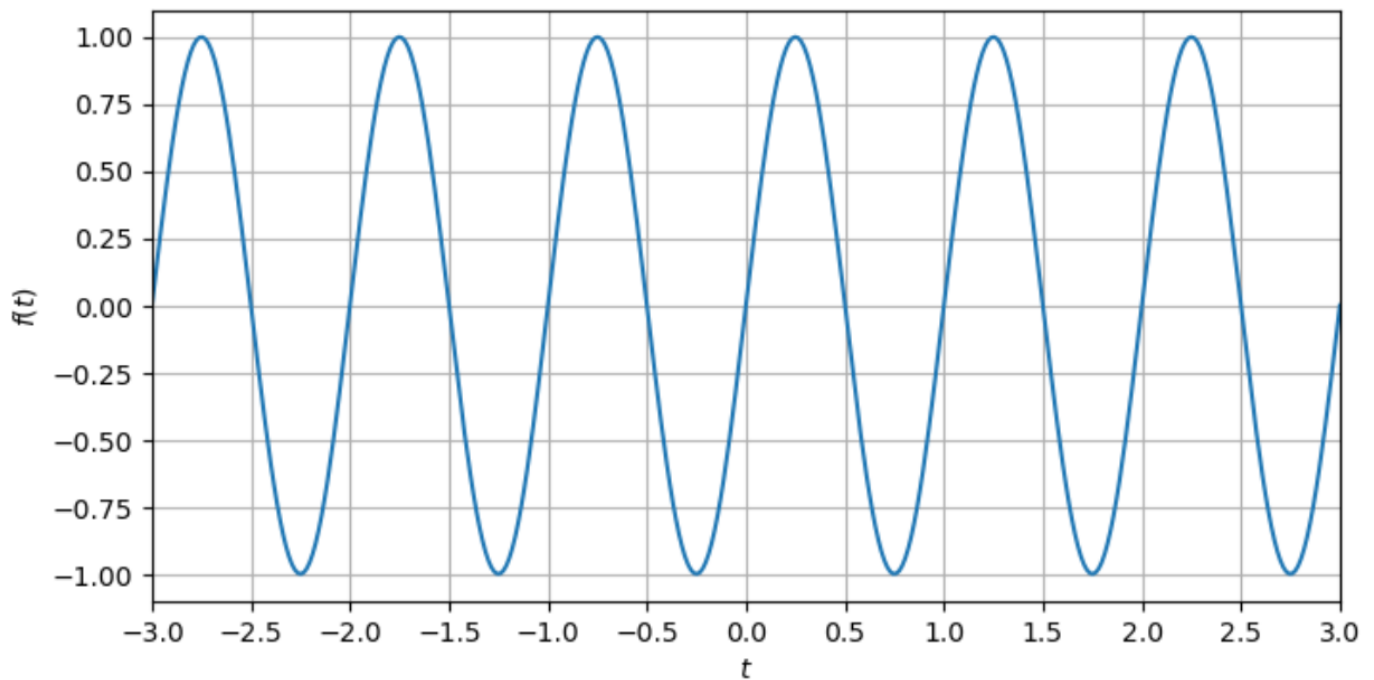
Exemple (Déterminer la période de $f : t \mapsto \frac{2}{5} \cos(2t + \frac{\pi}{3})$)

Via le raisonnement précédent, on obtient la période T de f :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

On retrouve bien la période lue graphiquement.

- 1) Déterminer la période de $t \mapsto \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}(1 - \pi t))$
- 2) *a)* Estimer graphiquement la période de la fonction cosinusoidale représentée graphiquement ci-dessous :
b) En déduire une estimation de sa pulsation propre.



2.3.3 Détermination du décalage temporel par le calcul

Méthode (Déterminer le décalage temporel de $f : t \mapsto A \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$)

On cherche le plus petit réel positif s tel que $f(s) = A$.

$$\begin{aligned} f(s) = A &\Leftrightarrow A \cdot \cos(\omega \cdot s + \psi) = A \\ &\Leftrightarrow \cos(\omega \cdot s + \psi) = 1 \\ &\Leftrightarrow \omega \cdot s + \psi \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \omega \cdot s + \psi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc :

$$s = \frac{2\pi - \psi}{\omega}$$

Exemple (Déterminer le décalage temporel de $f : t \mapsto \frac{2}{5} \cos(2 \cdot t + \frac{\pi}{3})$)

Via le raisonnement précédent, on obtient le décalage temporel s de f :

$$s = \frac{2\pi - \psi}{\omega} = \frac{2\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

On retrouve bien le décalage temporel lu graphiquement.

- 1) Déterminer le décalage temporel de $t \mapsto \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}(1 - \pi t))$
- 2)
 - a) Estimer graphiquement le décalage temporel de la fonction cosinusoidale représentée graphiquement dans la section précédente.
 - b) En déduire une estimation de sa phase initiale.
 - c) Quelle expression semble avoir la fonction f ?

2.3.4 Estimation de la phase initiale d'une fonction cosinusoidale à partir de sa représentation graphique

Méthode (estimer la phase initiale d'une fonction cosinusoidale à partir de sa représentation graphique)

Pour déterminer la phase initiale d'une fonction cosinusoidale à partir de sa représentation graphique :

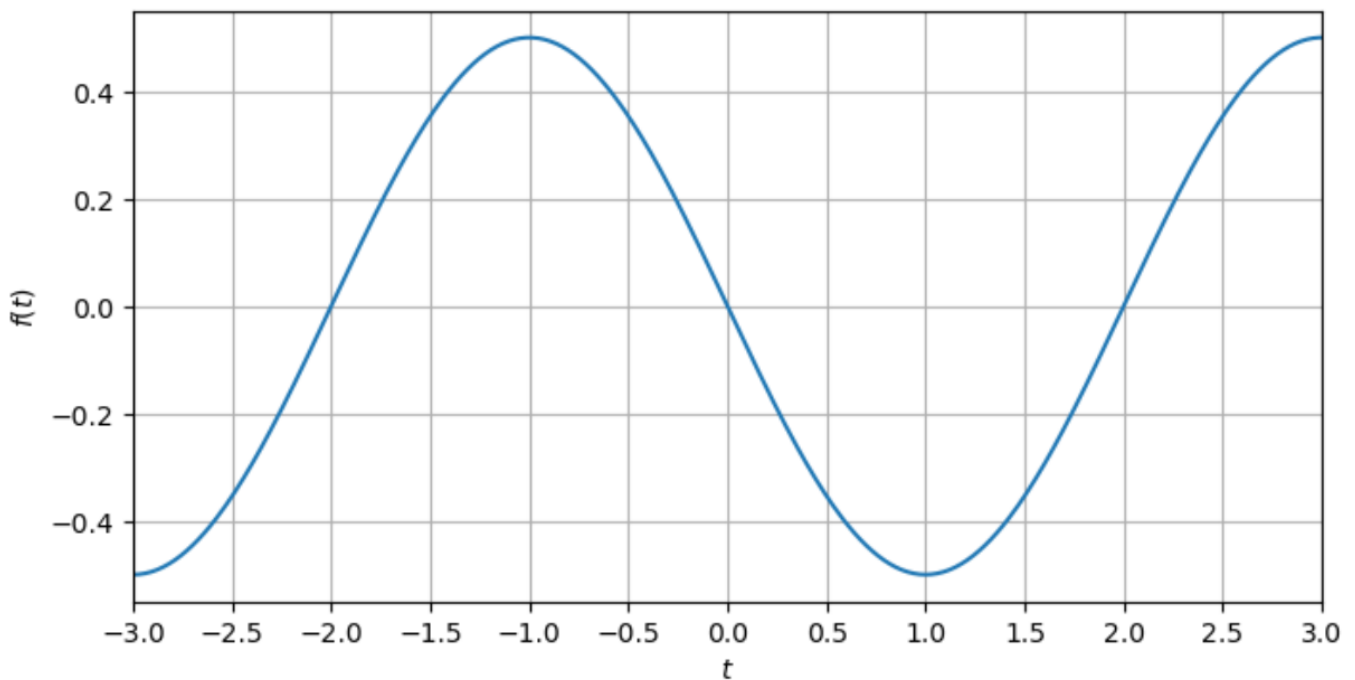
- On estime sa période T graphiquement.
- On déduit sa pulsation propre ω de sa période T via :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- On estime son décalage temporel s graphiquement.
- On déduit sa phase initiale ψ via :

$$\psi = 2\pi - \omega s$$

1) Quelle expression semble avoir la fonction f dont la représentation graphique est la suivante?



2.4 Utilisation des nombres complexes

2.4.1 Phaseurs et correspondance bijective entre les fonctions cosinusoidales et les phaseurs

Remarque-définition (phaseurs et correspondance bijective entre les fonctions cosinusoidales et les phaseurs)

La formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ permet d'exprimer toute fonction cosinusoidale $f(t)$ (à valeurs réelles) comme la partie réelle d'une fonction à valeurs complexes :

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos(\omega.t + \phi) \\ &= A \Re e(\cos(\omega.t + \phi) + i \sin(\omega.t + \phi)) \\ &= A \Re e(e^{i(\omega.t + \phi)}) \\ &= \Re e(A.e^{i(\omega.t + \phi)}) \\ &= \Re e(A.e^{i\phi} e^{i\omega.t}) \end{aligned}$$

Remarque : Si $f(t) = 0$, on ne peut pas utiliser l'écriture exponentielle mais on peut quand même écrire $f(t) = \Re e(0)$. On appelle **phaseur** associé à la fonction cosinusoidale $f : t \mapsto A \cos(\omega.t + \phi)$, le nombre complexe $A.e^{i\phi}$ (ou 0 si $f = 0$). Son module est donc l'amplitude de f et son argument compris dans $[0; 2\pi[$ est la phase initiale de f . On note FC_μ l'ensemble des fonctions cosinusoidales de fréquence angulaire μ :

$$FC_\mu = \left\{ \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto B \cos(\mu.t + \Psi) \end{array} , B \in \mathbb{R}^+, \Psi \in [0; 2\pi[\right\}$$

Via l'application p_μ suivante, à chaque fonction cosinusoidale de fréquence angulaire μ , on peut associer son phaseur :

$$p_\mu : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto B \cos(\mu.t + \Psi) \end{array} \mapsto B e^{i\Psi}$$

À chaque nombre complexe z , il existe une unique fonction cosinusoidale f de fréquence angulaire μ telle que $p_\mu(f) = z$ (On dit alors que p_μ est bijective.).

L'inverse p_μ^{-1} de p_μ est alors bien définie comme l'application qui, à chaque nombre complexe z , associe l'unique fonction cosinusoidale f de fréquence angulaire μ telle que $p_\mu(f) = z$:

$$p_\mu^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow FC_\mu$$

$$z \mapsto \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \Re e(z e^{i\mu t}) \end{array}$$

Exemples (phaseurs et correspondance bijective entre les fonctions cosinusoidales et les phaseurs)

- Exemple 1 :

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto B \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi)$$

- Le phaseur de c est $p_\mu(c) = B e^{i\psi}$.
- $c = p_\mu^{-1}(B e^{i\psi})$
- c est l'unique fonction cosinusoidale de fréquence angulaire μ qui a pour phaseur le nombre complexe $B e^{i\psi}$.

- Exemple 2 :

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 2 \cdot \cos(2\pi \cdot t)$$

- Le phaseur de c est $p_{2\pi}(c) = 2 e^{i \cdot 0} = 2$.
- $c = p_{2\pi}^{-1}(2)$
- c est l'unique fonction cosinusoidale de fréquence angulaire 2π qui a pour phaseur le nombre complexe 2.

- Exemple 3 :

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- Le phaseur de c est $p_1(c) = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$.
- $c = p_1^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$
- c est l'unique fonction cosinusoidale de fréquence angulaire 1 qui a pour phaseur le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$.

- Exemple 4 :

$$z = 1 - i$$

- La fonction cosinusoidale $p_\pi^{-1}(z) = p_\pi^{-1}(1 - i)$ est la fonction cosinusoidale
 - de fréquence angulaire π ,
 - d'amplitude $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et
 - dont la phase initiale est congrue à $\arg(1 - i) = \arg\left(\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ modulo 2π . Et $-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4} [2\pi]$
- $p_\pi^{-1}(z)$ est la fonction suivante :

$$p_\pi^{-1}(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \sqrt{2} \cdot \cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

- 1) On note c_1 et c_2 les deux fonctions cosinusoidales suivantes : $c_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $c_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $$t \mapsto 2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \quad t \mapsto 3 \cdot \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- a) Via *Python* et *Jupyter*, on a tracé ci-contre la représentation graphique des fonctions c_1 , c_2 et $c_1 + c_2$.
Que peut-on conjecturer à la vue de ce graphique concernant la somme de deux fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire?

- b) Recopier et compléter les écritures exponentielles et algébriques des phaseurs de c_1 et de c_2 suivantes :

$$p_{\dots}(c_1) = \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}^+} e^{i \dots} = \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \quad p_{\dots}(c_2) = \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}^+} e^{i \dots} = \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}}$$

- c) Recopier et compléter :

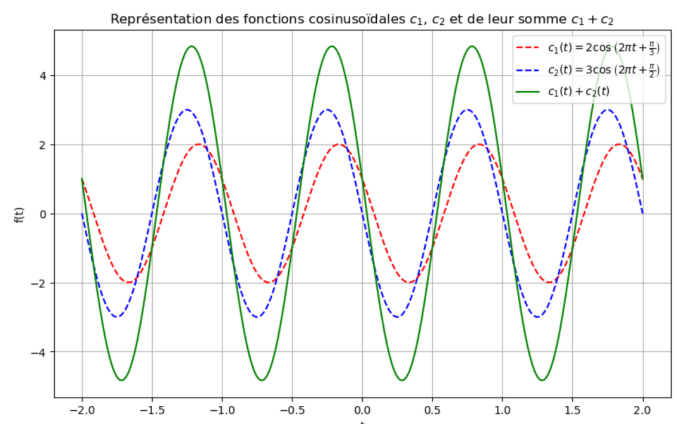
$$c_1(t) + c_2(t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cdot \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \Re e\left(e^{i \dots}\right) + 3 \cdot \Re e\left(e^{i \dots}\right)$$

$$= \dots$$

$$= \Re e\left(\dots e^{i 2\pi t}\right)$$

- d) En déduire que $c_1 + c_2$ est bien une fonction cosinusoidale de fréquence angulaire 2π , l'écriture algébrique de son phaseur $p_{2\pi}(c_1 + c_2)$, son amplitude et sa phase initiale.



2.4.2 Applications à l'étude des sommes de fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire

2.4.2.1 Pour les étudiants qui veulent aller plus loin en comprenant comment une grande abstraction mathématique peut s'appliquer très concrètement : Isomorphisme p_μ entre l'espace des fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire et \mathbb{C}

$$\begin{aligned} \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \left(p_\mu^{-1}(z_1 + z_2) \right)(t) &= \mathcal{R}e \left((z_1 + z_2) \cdot e^{i\mu t} \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(z_1 \cdot e^{i\mu t} + z_2 \cdot e^{i\mu t} \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(z_1 \cdot e^{i\mu t} \right) + \mathcal{R}e \left(z_2 \cdot e^{i\mu t} \right) \\ &= \left(p_\mu^{-1}(z_1) \right)(t) + \left(p_\mu^{-1}(z_2) \right)(t) \\ &= \left(p_\mu^{-1}(z_1) + p_\mu^{-1}(z_2) \right)(t) \end{aligned}$$

Donc l'application p_μ^{-1} est additive. **La fonction cosinusoidale associée à la somme de deux phaseurs est la somme des fonctions cosinusoidales associées à chacun de ses deux phaseurs :**

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, p_\mu^{-1}(z_1 + z_2) = p_\mu^{-1}(z_1) + p_\mu^{-1}(z_2)$$

p_μ et p_μ^{-1} sont des applications bijectives inverses l'une de l'autre. Autrement dit :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}, p_\mu \left(p_\mu^{-1}(z) \right) = z \\ \forall c \in \text{FC}_\mu, p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c) \right) = c \\ \forall z \in \mathbb{C}, \left(p_\mu \circ p_\mu^{-1} \right)(z) = z \\ \forall c \in \text{FC}_\mu, \left(p_\mu^{-1} \circ p_\mu \right)(c) = c \end{cases}$$

Autrement dit, en notant les dites applications « identité »

$$\begin{array}{ccc} id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} id_{\text{FC}_\mu} : \text{FC}_\mu & \rightarrow & \text{FC}_\mu \\ c & \mapsto & c \end{array}$$

les deux relations précédentes s'écrivent de façon encore plus compacte :

$$\begin{array}{l} p_\mu \circ p_\mu^{-1} = id_{\mathbb{C}} \\ p_\mu^{-1} \circ p_\mu = id_{\text{FC}_\mu} \end{array}$$

On peut alors montrer que **la somme de deux fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire est aussi une fonction cosinusoidale de même fréquence angulaire :**

$$\begin{aligned} \forall (c_1, c_2) \in \text{FC}_\mu^2, c_1 + c_2 &= id_{\text{FC}_\mu}(c_1) + id_{\text{FC}_\mu}(c_2) \\ &= \left(p_\mu^{-1} \circ p_\mu \right)(c_1) + \left(p_\mu^{-1} \circ p_\mu \right)(c_2) \\ &= p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c_1) \right) + p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c_2) \right) \\ &= p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \right) \end{aligned}$$

Donc la somme de deux fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire c_1 et c_2 est bien une fonction cosinusoidale de même fréquence angulaire. Plus précisément, il s'agit de la fonction cosinusoidale associée au phaseur $p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2)$, c'est-à-dire le phaseur qui est la somme des phaseurs associés à chacune de ces deux fonctions cosinusoidales c_1 et c_2 .

De plus, on peut même montrer que l'application p_μ est elle aussi additive en prenant l'image de chacun des membres de l'égalité précédente par l'application p_μ :

$$\begin{aligned} \forall (c_1, c_2) \in \text{FC}_\mu^2, c_1 + c_2 &= p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \right) \\ p_\mu(c_1 + c_2) &= p_\mu \left(p_\mu^{-1} \left(p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \right) \right) \\ &= \left(p_\mu \circ p_\mu^{-1} \right) \left(p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \right) \\ &= id_{\mathbb{C}} \left(p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \right) \\ &= p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2) \end{aligned}$$

Donc l'application p_μ est additive. **Le phaseur associé à la somme de deux fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire est la somme des phaseurs associés à chacune de ses deux fonctions cosinusoidales :**

$$\forall (c_1, c_2) \in \text{FC}_\mu^2, p_\mu(c_1 + c_2) = p_\mu(c_1) + p_\mu(c_2)$$

2.4.2.2 Déterminer l'amplitude et la phase initiale d'une somme de fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire

De la section précédente dont la lecture n'est pas obligatoire, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriété (sommes de fonctions cosinusoidales de même fréquence angulaire).

Soient $\mu, \psi_1, \psi_2 \in [0; 2\pi[$ et $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^+$.

On note c_1 et c_2 les deux fonctions cosinusoidales de fréquence angulaire μ suivantes :

$$\begin{aligned} c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto B_1 \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi_1) & t &\mapsto B_2 \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi_2) \end{aligned}$$

Alors la somme $c_1 + c_2$ est la fonction cosinusoidale de fréquence angulaire μ dont le phaseur est la somme du phaseur de c_1 et du phaseur de c_2 .

Autrement dit :

- Son phaseur est $B_1 \cdot e^{i\psi_1} + B_2 \cdot e^{i\psi_2}$.
- Sa fréquence angulaire est μ .
- Son amplitude est $|B_1 \cdot e^{i\psi_1} + B_2 \cdot e^{i\psi_2}|$.
- Sa phase initiale est congrue modulo 2π à $\arg(B_1 \cdot e^{i\psi_1} + B_2 \cdot e^{i\psi_2})$.

- 1) En utilisant la propriété précédente, écrire $f(t)$ sous la forme « $B \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$ » avec $B \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\psi \in [0; 2\pi[$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(t) = 2 \cos(4t + \frac{\pi}{3}) + 3 \cos(4t + \frac{\pi}{6})$

b) $f(t) = \cos(\omega t) + \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$, avec $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$

c) $f(t) = A \cos(\omega t) + A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + A \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3})$ avec $A \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$

- 2) Soient $\mu, \psi_1, \psi_2 \in [0; 2\pi[$ et $B \in \mathbb{R}^+$.

On note c_1 et c_2 les deux fonctions cosinusoidales de même amplitude B et de même fréquence angulaire μ suivantes :

$$\begin{aligned} c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto B \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi_1) & t &\mapsto B \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi_2) \end{aligned}$$

- a) Recopier et compléter :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + \bar{z} = \dots$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = \dots$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \dots$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} + e^{ib} = e^{i\dots} \cdot \left(\dots + e^{-i\frac{a+b}{2}} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}, e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\dots} \cdot \left(\dots + e^{-i\frac{a+b}{2}} \right) \\ &= \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^{i\dots} \end{aligned}$$

- b) En déduire l'amplitude et la phase initiale de la fonction cosinusoidale $c_1 + c_2$ en fonction de B , ψ_1 et ψ_2 .

- c) Comment doivent-êtré ψ_1 et ψ_2 pour que l'amplitude de $c_1 + c_2$ soit maximale (resp. minimale) ?

- d) En déduire l'amplitude et la phase initiale de la fonction cosinusoidale $t \mapsto \cos(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2})$.

- 3) Soient $\mu, \psi \in [0; 2\pi[$ et $B_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$.

On note c_1 et c_2 les deux fonctions cosinusoidales de même phase initiale ψ et de même fréquence angulaire μ suivantes :

$$\begin{aligned} c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto B_1 \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi) & t &\mapsto B_2 \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi) \end{aligned}$$

Déterminer l'amplitude de $c_1 + c_2$.

3 Oscillateur harmonique non amorti et libre

3.1 Cas général

Un **oscillateur harmonique non amorti et libre** est un oscillateur harmonique dont le **coefficient d'amortissement et le forçage sont nuls** (Ils sont notés « b » et « $g(t)$ » dans la première définition).

Son comportement (i.e. sa position en fonction du temps) est donc décrit par (i.e. est une solution de) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

où ω (noté \sqrt{c} dans la première définition) est une constante strictement positive que l'on appelle la **pulsation propre**.

Les oscillateurs harmoniques non amortis et libres sont en fait décrits en détail dans la section précédente « **Étude des fonctions décrivant le mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti et libre** ».

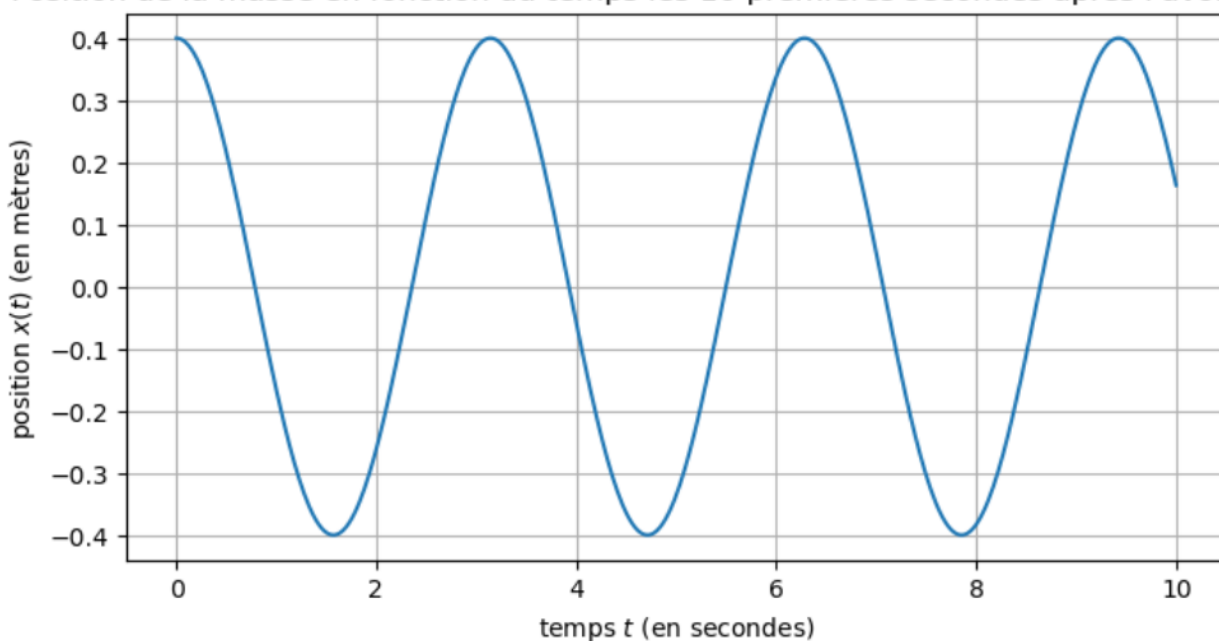
3.2 Exemple

On a déjà étudié un tel exemple d'oscillateur non amorti et libre dans la partie I) du test type TOMIC « **Étude de cas sur les équations différentielles** » (le cinquième sur le site) :



Cependant, comme dans cet exemple la masse est lâchée sans vitesse initiale et à sa position maximale, la phase initiale de la position de la masse est nulle :

Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée



- 1) Refaire la partie I) du **test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles »** (le cinquième sur le site), en supposant cette fois que la vitesse de la masse à l'instant $t = 0$ est $\frac{-4\sqrt{3}}{5} m/s$.
- 2) Déterminer la fréquence angulaire, la période, le phaseur, l'amplitude, la phase initiale et le décalage temporel de la solution obtenue avec cette nouvelle vitesse initiale.
- 3) Tracer la position de la masse en fonction du temps avec cette nouvelle vitesse initiale.
- 4) Refaire les questions précédentes avec une vitesse initiale de $1 m/s$.
- 5) À quelle vitesse initiale la phase initiale serait $\frac{\pi}{6}$?

4 Oscillateur harmonique non amorti et forcé

4.1 Cas général

Un **oscillateur harmonique non amorti et forcé** est un oscillateur harmonique dont le **coefficient d'amortissement est nul et dont le forçage est non nul** (Ils sont notés « b » et « $g(t)$ » dans la **première définition**).

Son comportement (i.e. sa position en fonction du temps) est donc décrit par (i.e. est une solution de) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + \omega^2 \cdot y(t) = g(t)$$

où :

- ω (noté \sqrt{c} dans la **première définition**) est une constante strictement positive que l'on appelle la **pulsation propre**.
- $g(t)$ est une fonction du temps représentant une force extérieure appelée le **forçage**.

Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants, on utilise les sections « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » puis « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand on connaît déjà une solution particulière » du document « **Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles** ».

Par ailleurs, comme l'équation homogène associée est la même que celle de l'oscillateur harmonique non amorti et non forcé, l'expression générale $y_0(t)$ des solutions de cette équation homogène sous la forme d'une fonction cosinoïdale a été déjà été déterminée dans la **section « Forme factorisée « $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ » »** :

$$y_0(t) = A \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

Ainsi, si l'on parvient à déterminer une solution particulière f_p de cette équation, on peut écrire les solutions sous la forme suivante :

Proposition (Expression de la position en fonction du temps de l'oscillateur harmonique non amorti, forcé et de pulsation propre ω)

Si f_p est une solution particulière de l'équation $y'' + \omega^2 \cdot y = g$, la fonction f qui modélise la position en fonction du temps de l'oscillateur harmonique non amorti, forcé par le forçage g et de pulsation propre ω est de la forme suivante :

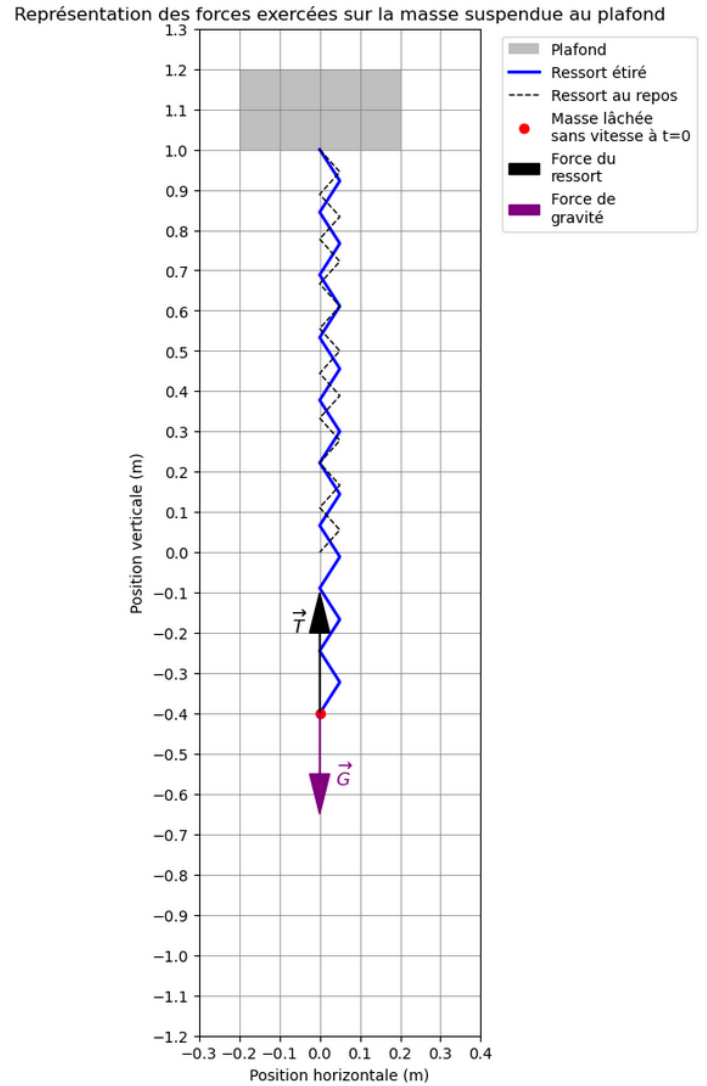
$$f(t) = f_p(t) + A \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

4.2 Forçage constant

Une masse de 2 kg est attachée à un ressort vertical de constante de raideur $k = 8 \text{ N/m}$ et de longueur au repos de 1 m fixé à l'autre extrémité à un plafond fixe. On néglige les frottements de l'air.

On se repère via le repère cartésien représenté ci-contre et on note $f(t)$ l'ordonnée de la masse à l'instant t .

- 1) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer une équation différentielle dont f est solution.
- 2) Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(t)$ en précisant le phaseur, l'amplitude et la phase initiale de son terme cosinusoidal et tracer f avec *Python* et *Jupyter* :
 - a) La masse est lâchée à l'instant $t = 0$ comme sur la figure et sans vitesse initiale.
 - b) À l'instant $t = 0$, la masse est lâchée sans vitesse initiale et le ressort est au repos.
 - c) À l'instant $t = 0$, le ressort est au repos et la masse se déplace vers le bas en parcourant 1 mètre par seconde.
 - d) $f(0) = \frac{2}{5}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.



4.3 Forçage cosinusoidal et résonance

On reprend l'exemple du ressort disposé sur une surface horizontale sans frottement. Initialement fixé à un mur immobile, on modifie cette configuration en introduisant un mur qui n'est plus rigide mais capable de vibrer. Cette modification est réalisée pour illustrer l'effet d'une force externe oscillante sur le système. Le second membre de l'équation différentielle est maintenant une fonction cosinusoidal $g(t) = B \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi) = \Re e(B e^{i\psi} e^{i\mu t})$:

$$E : y'' + \omega^2 \cdot y = B \cdot \cos(\mu \cdot t + \psi) = \Re e(B e^{i\psi} e^{i\mu t})$$

On cherche une solution particulière de cette équation E .

Pour ce faire, on cherche une solution particulière $y_{p,C}$ de l'équation complexe E_C associée :

$$E_C : y'' + \omega^2 \cdot y = B e^{i\psi} e^{i\mu t}$$

En effet, si $y_{p,C}(t)$ est une solution de E_C , alors $y_p = \Re e(y_{p,C}(t))$ est une solution particulière de E .

Le second membre de E_C est de la forme $P(t) e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, c'est le cas avec :

$$\begin{cases} P(t) = B e^{i\psi} & (\text{C'est même une fonction polynômiale constante.}) \\ \lambda = i\mu \end{cases}$$

L'équation caractéristique de E_C est l'équation suivante d'inconnue x :

$$x^2 + \omega^2 = 0$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont donc $-i\omega$ et $i\omega$.

4.3.1 Premier cas : La pulsation propre du forçage est différente de la pulsation propre de l'oscillateur (absence de résonance)

Dans ce cas, $\mu \neq \omega$ et donc $i\mu$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique.

- 1) En utilisant la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », déterminer sous quelle forme chercher une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation

$$E_{\mathbb{C}} : y'' + \omega^2 \cdot y = B e^{i\Psi} e^{i\mu t}$$

- 2) En déduire des expressions de $y'_{p,\mathbb{C}}$ et de $y''_{p,\mathbb{C}}$.
- 3) En raisonnant par équivalence, en déduire une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation $E_{\mathbb{C}}$.
- 4) En déduire une solution particulière y_p de l'équation E .
- 5) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation E .
- 6) En déduire une expression de la position $x(t)$ de la masse et tracer la en utilisant *Python* dans le cas particulier suivant :
 - La masse fait 2 kg.
 - La constante du ressort vaut 8 N/m.
 - À l'instant initial, le ressort est étiré de 40 cm.
 - À l'instant initial, la vitesse de la masse est nulle.
 - $B = 2$
 - $\Psi = 0$
 - $\mu = \sqrt{2}$

4.3.2 Deuxième cas : La pulsation propre du forçage est égale à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance)

Dans ce cas, $\mu = \omega$ et donc $i\mu$ est une racine simple de l'équation caractéristique.

- 7) En utilisant la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », déterminer sous quelle forme chercher une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation

$$E_{\mathbb{C}} : y'' + \omega^2 \cdot y = B e^{i\Psi} e^{i\mu t}$$

- 8) En déduire des expressions de $y'_{p,\mathbb{C}}$ et de $y''_{p,\mathbb{C}}$.
- 9) En raisonnant par équivalence, en déduire une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation $E_{\mathbb{C}}$.
- 10) En déduire une solution particulière y_p de l'équation E .
- 11) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation E .
- 12) En déduire que le ressort va finir par casser.
- 13) En déduire une expression de la position $x(t)$ de la masse et tracer la en utilisant *Python* dans le cas particulier suivant :
 - La masse fait 2 kg.
 - La constante du ressort vaut 8 N/m.
 - À l'instant initial, le ressort est étiré de 40 cm.
 - À l'instant initial, la vitesse de la masse est nulle.
 - $B = 2$
 - $\Psi = 0$

14) Dans l'article [Wikipédia « Pont de Broughton »](#), on lit :

« Le pont de Broughton édifié en 1826 pour le franchissement de l'Irwell entre Broughton et Pendleton (aujourd'hui deux faubourgs de Salford, dans la banlieue du Grand Manchester), dans le Lancashire, était l'un des premiers ponts suspendus construits en Europe. Le 12 avril 1831, alors que la troupe marchait au pas cadencé sur cet ouvrage, il se produisit un phénomène de résonance mécanique qui provoqua la ruine du pont. Un pivot de l'une des chaînes de suspension avait cédé, provoquant la chute du tablier vers l'une des extrémités, jetant 40 des soldats à la rivière. »



En utilisant le modèle du ressort, expliquer comment une telle catastrophe a pu arriver.

Image provenant de l'article [Wikipédia « Pont de Broughton »](#).

5 Oscillateur harmonique amorti et libre

5.1 Cas général et coefficient d'amortissement critique

Un **oscillateur harmonique amorti et libre** est un oscillateur harmonique dont le **coefficient d'amortissement est non nul et dont le forçage est nul** (Ils sont notés « b » et « $g(t)$ » dans la [première définition](#)).

Son comportement (i.e. sa position en fonction du temps) est donc décrit par (i.e. est une solution de) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + by'(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

où :

- ω (noté \sqrt{c} dans la [première définition](#)) est une constante strictement positive que l'on appelle la **pulsation propre**.
- $b > 0$ est le **coefficient d'amortissement**.

Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants, on utilise la section « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « [Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles](#) ».

L'équation caractéristique associée est l'équation suivante d'inconnue x :

$$x^2 + bx + \omega^2 = 0$$

On calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\omega^2$$

On détermine en quelle valeur du coefficient d'amortissement b , le discriminant Δ change de signe :

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\iff b^2 - 4\omega^2 = 0 \\ &\iff b^2 = 4\omega^2 \\ &\iff b = 2\omega \end{aligned}$$

Définition-propriété (coefficient d'amortissement critique).

On appelle **coefficient d'amortissement critique** le nombre b_{crit} défini comme suit :

$$b_{crit} = 2\omega$$

- b_{crit} est la valeur du coefficient d'amortissement à partir de laquelle le système passe du régime sous-amorti (oscillations amorties) au régime apériodique (ou critique, sans oscillation).
- b_{crit} est aussi la valeur du coefficient d'amortissement pour laquelle le système retrouve sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

Suivant les valeurs du **coefficient d'amortissement b par rapport au coefficient d'amortissement critique b_{crit} du système, il y a donc trois types d'amortissement** décrits dans les trois sous-sections suivantes.

5.1.1 Oscillateur harmonique libre sous-amorti

Dans ce cas :

$$b < b_{crit}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont les deux nombres complexes conjugués suivants :

$$\frac{-b - i\sqrt{4\omega^2 - b^2}}{2} = \frac{-b}{2} - i\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad \frac{-b + i\sqrt{4\omega^2 - b^2}}{2} = \frac{-b}{2} + i\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

On obtient :

Proposition (Expression générale de la position de l'oscillateur harmonique libre sous-amorti)
La fonction f qui modélise la position en fonction du temps de l'oscillateur harmonique libre, sous-amorti, de coefficient d'amortissement b et de pulsation propre ω est de la forme suivante :

$$f(t) = e^{\frac{-bt}{2}} A \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot t + \psi\right), \text{ avec } A \geq 0 \text{ et } \psi \in [0; 2\pi[$$

5.1.2 Oscillateur harmonique libre critiquement amorti

Dans ce cas :

$$b = b_{crit}$$

L'unique solution de l'équation caractéristique est $\frac{-b}{2}$.

On obtient :

Proposition (Expression générale de la position de l'oscillateur harmonique libre critiquement amorti)
La fonction f qui modélise la position en fonction du temps de l'oscillateur harmonique libre, critiquement amorti et de pulsation propre ω est de la forme suivante :

$$f(t) = e^{\frac{-bt}{2}} (A \cdot t + B), \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

5.1.3 Oscillateur harmonique libre sur-amorti

Dans ce cas :

$$b > b_{crit}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont les deux réels suivants :

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2} \qquad \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2}$$

On obtient :

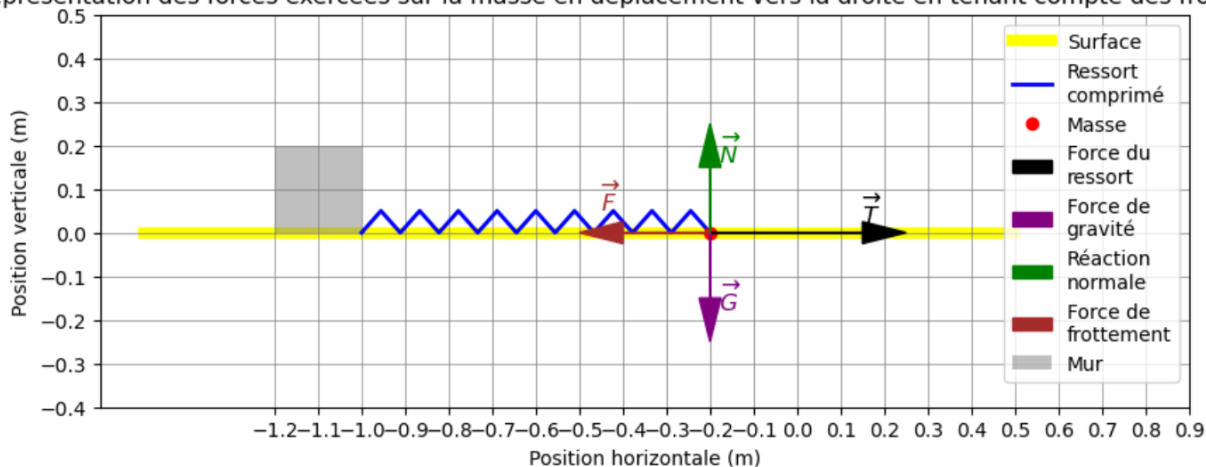
Proposition (Expression générale de la position de l'oscillateur harmonique libre sur-amorti)
La fonction f qui modélise la position en fonction du temps de l'oscillateur harmonique libre, sur-amorti, de coefficient d'amortissement b et de pulsation propre ω est de la forme suivante :

$$f(t) = A \cdot e^{\left(\frac{-b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2}\right) \cdot t} + B \cdot e^{\left(\frac{-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \omega^2}\right) \cdot t}, \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

5.2 Exemples

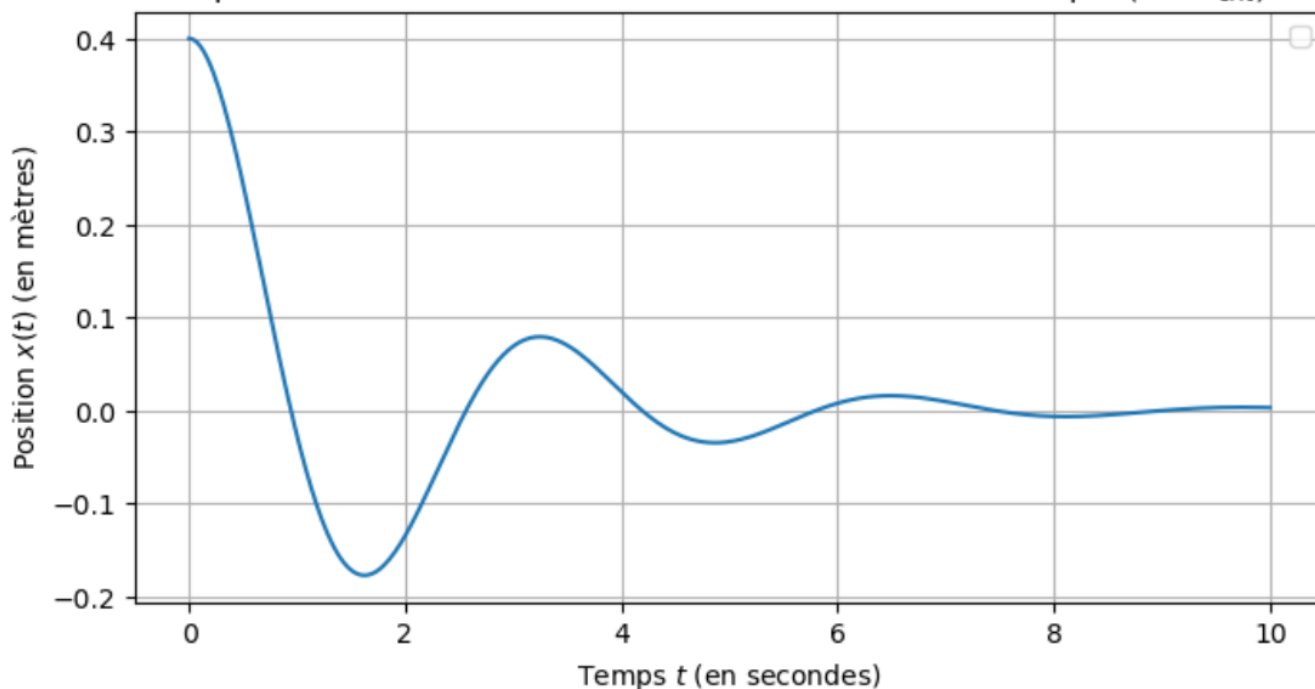
On a déjà étudié un tel exemple d'oscillateur amorti et libre dans la partie II) du [test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles »](#) (le cinquième sur le site) :

Représentation des forces exercées sur la masse en déplacement vers la droite en tenant compte des frottements



On voit dans la figure suivante que l'on a obtenu un sous-amortissement :

Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée en cas d'amortissement sous-critique ($a < a_{crit}$)



- 1) Dans la figure précédente, à quoi voit-on qu'il s'agit d'un sous-amortissement?
- 2) Pour découvrir un exemple d'amortissement critique et un exemple de sur-amortissement, refaire la partie II) du [test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles »](#) (le cinquième sur le site) dans chacun des deux cas suivants :
 - a) $a = 8 \text{ kg/s}$
 - b) $a = 8\sqrt{2} \text{ kg/s}$
- 3) Tracer la position de la masse en fonction du temps dans chacun des cas précédents.
- 4) Refaire les deux questions précédentes avec une vitesse initiale de 1 m/s .

6 Oscillateur harmonique amorti et forcé

Un **oscillateur harmonique amorti et forcé** est un oscillateur harmonique dont le **coefficient d'amortissement et le forçage sont tous les deux non nuls** (Ils sont notés « b » et « $g(t)$ » dans la [première définition](#)).

Son comportement (i.e. sa position en fonction du temps) est donc décrit par (i.e. est une solution de) l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + by'(t) + \omega^2 \cdot y(t) = g(t)$$

où :

- $b > 0$ est le **coefficient d'amortissement**.
- ω (noté \sqrt{c} dans la première définition) est une constante strictement positive que l'on appelle la **pulsation propre**.
- $g(t)$ est une fonction du temps représentant une force extérieure appelée le **forçage**.

On voit deux exemples d'oscillateurs harmoniques amortis et forcés dans la section « Oscillateur harmonique amorti et forcé : Circuit RLC en parallèle avec générateur et avec condensateur non chargé initialement ».

7 Application à l'étude des circuits électriques RLC

7.1 Définition

Définition (circuit électrique RLC)

Un **circuit électrique RLC** est un type de circuit électrique qui comprend trois composants principaux, chacun représenté par une lettre dans l'acronyme « **RLC** » : **R** pour résistance, **L** pour inductance et **C** pour capacité. Chacun de ces composants a un rôle différent dans la gestion du flux d'électricité dans le circuit :

- **R (Résistance)** : La résistance contrôle le flux d'électricité en créant un obstacle qui ralentit le passage du courant. Plus la résistance est élevée, plus le courant a du mal à traverser, et moins il y a de courant qui passe pour une tension donnée. Tout comme l'amortisseur absorbe l'énergie et réduit l'amplitude des oscillations dans le système masse-ressort, la résistance dans un circuit RLC dissipe l'énergie sous forme de chaleur et réduit l'amplitude des oscillations électriques (courant et tension).
- **L (Inductance)** : L'inductance, souvent mise en œuvre avec un composant appelé bobine, a la propriété de s'opposer aux changements de courant dans le circuit. Lorsque le courant change rapidement, une bobine peut générer une tension en réponse à ce changement, ce qui a pour effet de ralentir la modification du courant. C'est l'analogue de la masse.
- **C (Capacité)** : La capacité, représentée par un condensateur, peut stocker l'énergie sous forme de champ électrique. Les condensateurs ont la particularité de résister à des changements de tension. Lorsqu'une tension est appliquée, ils stockent de l'énergie, et lorsqu'elle est retirée, ils la restituent, ce qui peut influencer la manière dont la tension change dans le circuit. C'est l'analogue de la constante de raideur du ressort.

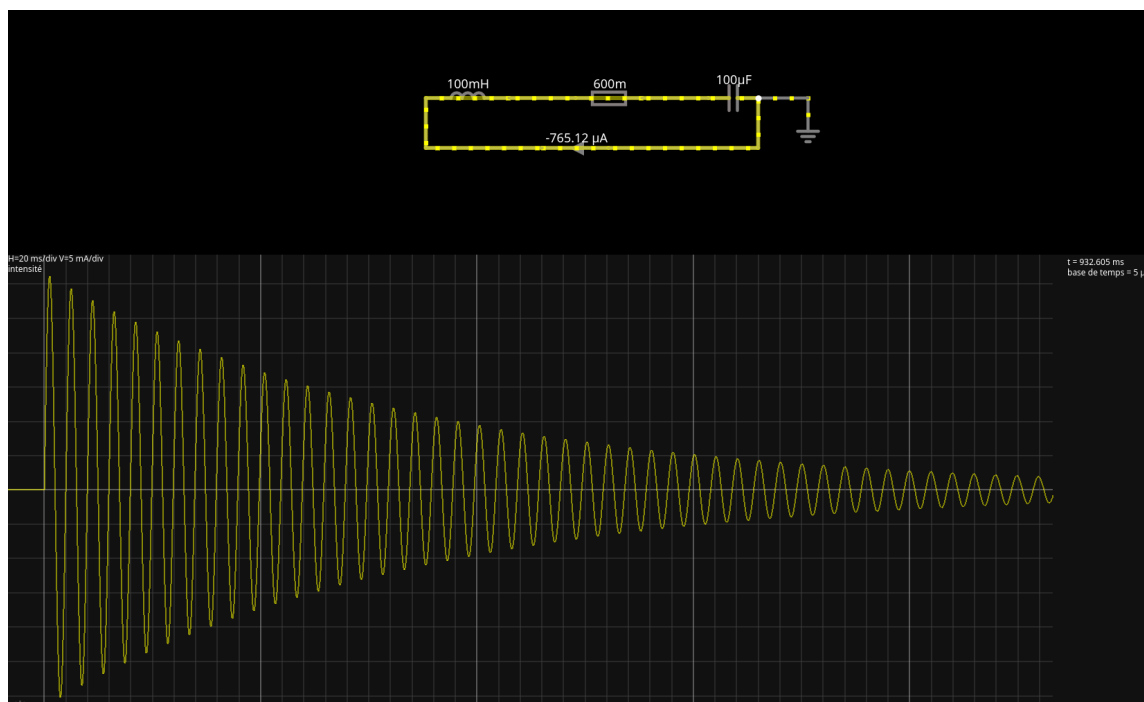
7.2 Oscillateur harmonique amorti non forcé : Circuit RLC en série sans générateur avec condensateur chargé initialement

Le circuit représenté dans la capture d'écran ci-dessous comporte une seule maille avec :

- une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$,
- une résistance R de $600 \text{ m}\Omega$,
- un condensateur de capacité $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$.

Initialement, le courant dans le circuit est nul et le condensateur est chargé avec une charge U_0 de -1 V (avec la même orientation que sur la capture d'écran).

On souhaite déterminer une expression $i(t)$ du courant en ampères en une section de ce circuit (avec la même orientation que sur la capture d'écran).

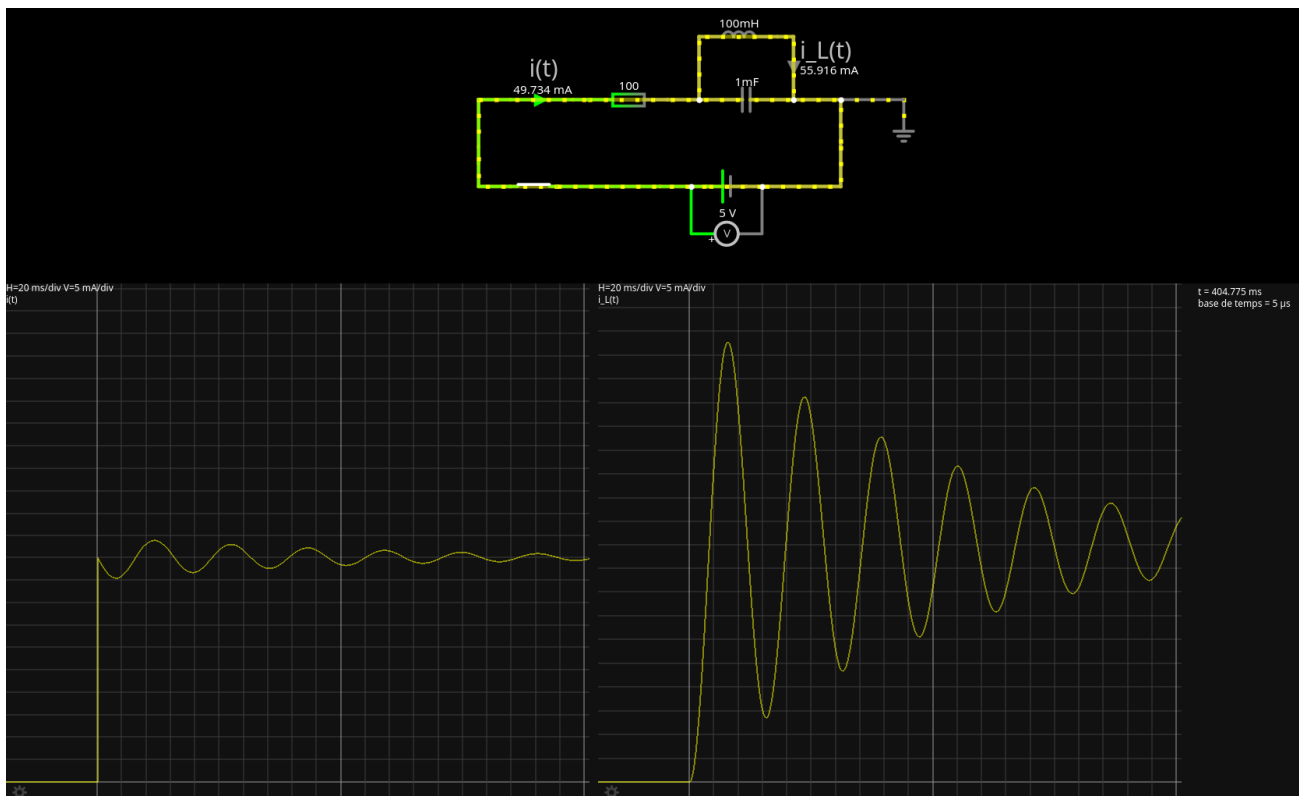


- 1)
 - a) Rappeler la relation liant la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine et l'intensité $i(t)$ du courant qui la parcourt.
 - b) Rappeler la relation liant la tension $u_R(t)$ aux bornes de la résistance et l'intensité $i(t)$ du courant qui la parcourt.
 - c) Rappeler la relation liant la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et l'intensité $i(t)$ du courant qui le parcourt.
- 2) En appliquant la loi des mailles, déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont $i(t)$ est solution.
- 3) Résoudre cette équation (i.e. Déterminer toutes ses solutions).
- 4)
 - a) Que vaut $i(0)$?
 - b) En commençant par déterminer $u_L(0)$ en utilisant la loi des mailles pour $t = 0$, déterminer $i'(0)$.
 - c) Déterminer une expression de $i(t)$.
- 5)
 - a) Suivre les étapes suivantes pour simuler le circuit électrique susmentionné via l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » :
 - Se rendre sur le site du cours à l'url <https://caltuli.online>.
 - Cliquer sur le lien étiqueté « Falstad Circuit Simulator » dans le titre de section « Fichiers de configuration pour le simulateur de circuit électrique Falstad Circuit Simulator » afin d'accéder à l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » à l'url <https://www.falstad.com/circuit>.
 - Depuis le site du cours à l'url <https://caltuli.online>, ouvrir le fichier de configuration via le lien étiqueté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et libre ».
 - Copier l'intégralité de ce fichier de configuration dans le presse-papier en utilisant probablement les raccourcis « ctrl + a » puis « ctrl + c ».
 - Sélectionner l'item « Importer depuis texte... » du menu déroulant « Fichier » de l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » à l'url <https://www.falstad.com/circuit>.
 - Sélectionner la zone de saisie de la fenêtre qui apparaît puis y recopier le contenu du fichier de configuration susmentionné en utilisant probablement le raccourci « ctrl + v ».
 - Cliquer sur le bouton « OK » de la fenêtre précédente pour simuler enfin le circuit électrique précédent.
 - b) Faire tracer par le simulateur en ligne la courbe de l'intensité en cliquant sur bouton « Run/STOP ».
 - c) Écrire un code *Python* dans l'interface de *Jupyter* pour tracer la courbe de l'intensité avec l'expression obtenue précédemment afin de vérifier qu'elle correspond bien à celle obtenue par le simulateur.
- 6)
 - a) Déterminer la valeur R_{crit} de R pour laquelle la décharge est la plus rapide.
 - b) Déterminer une expression de l'intensité $i(t)$ avec cette nouvelle valeur R_{crit} de R .
 - c) Simuler le circuit comme précédemment avec cette nouvelle valeur R_{crit} de R .
 - d) Vérifier comme précédemment en traçant dans l'interface de *Jupyter* la courbe de l'intensité correspondant à cette nouvelle valeur R_{crit} de R et en la comparant avec celle obtenue par le simulateur.
- 7) Refaire les questions précédentes avec une valeur de R qui correspond à un sur-amortissement.

7.3 Oscillateur harmonique amorti et forcé : Circuit RLC en parallèle avec générateur et avec condensateur non chargé initialement

7.3.1 Avec un forçage constant : Avec un générateur délivrant un courant continu

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante.



- La bobine est d'inductance $L = 100 \text{ mH}$,
- La résistance R est de 100Ω ,
- Le condensateur est de capacité $C = 1 \text{ mF}$.
- La tension aux bornes du générateur est constante égale à 5 V .
- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note $i(t)$ le courant qui traverse le générateur et $i_L(t)$ le courant qui traverse la bobine. On souhaite déterminer une expression $i_L(t)$ du courant en ampères qui traverse la bobine.

1) Démontrer que :

$$i_L(0) = 0$$

2) Démontrer que :

$$i_L'(0) = 0$$

3) Démontrer que i_L est solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$RLC y'' + Ly' + Ry = 5$$

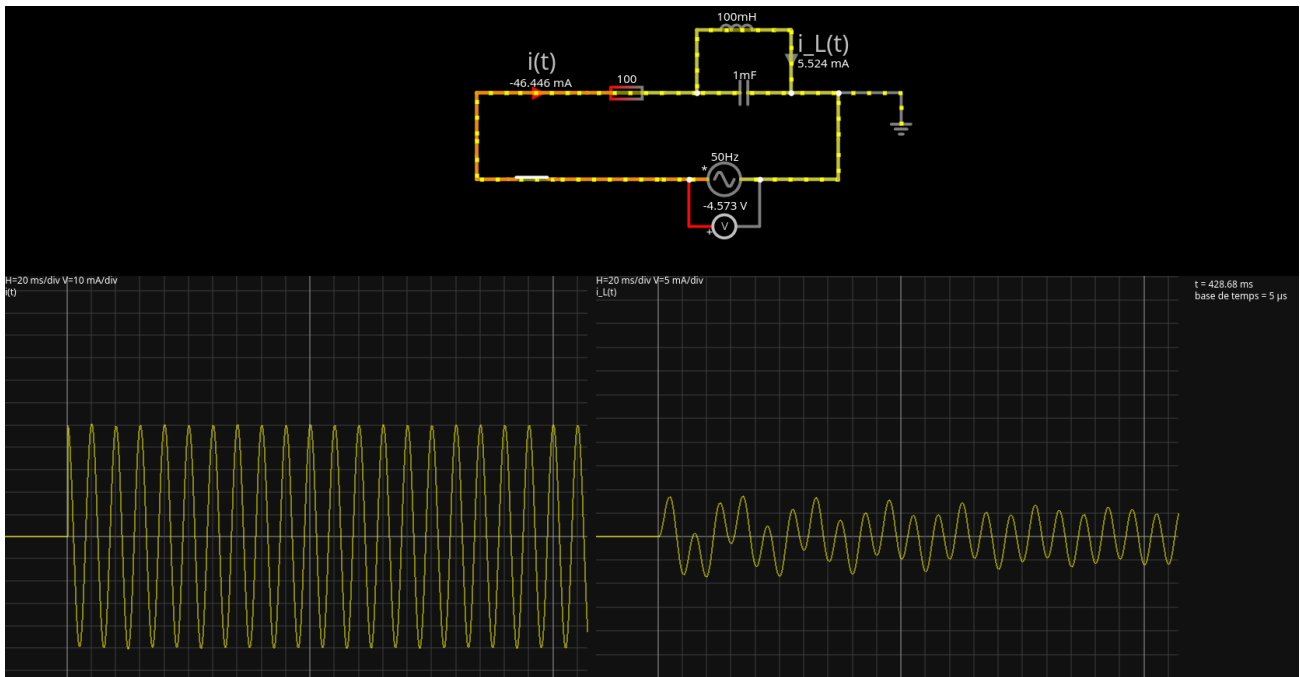
4) En déduire une expression de $i_L(t)$ en fonction de R , L , C et t .

5) Vérifier l'expression trouvée en utilisant le simulateur en ligne comme dans l'exercice de la section précédente.

Depuis le site du cours à l'url <https://caltuli.online>, on peut récupérer le fichier de configuration de ce circuit via le lien étiqueté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et forcé avec un forçage constant ».

7.3.2 Avec un forçage cosinusoidal : Avec un générateur délivrant un courant alternatif

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante.



- La bobine est d'inductance $L = 100 \text{ mH}$,
- La résistance R est de 100Ω ,
- Le condensateur est de capacité $C = 1 \text{ mF}$.
- La tension en Volts aux bornes du générateur à l'instant t est donnée par l'expression suivante :

$$g(t) = 5 \cos(100\pi t)$$

- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note $i(t)$ le courant qui traverse le générateur et $i_L(t)$ le courant qui traverse la bobine. On souhaite déterminer une expression $i_L(t)$ du courant en ampères qui traverse la bobine.

- 1) Déterminer une expression de $i_L(t)$ en fonction de R , L , C et t .
- 2) Vérifier l'expression trouvée en utilisant le simulateur en ligne comme dans l'exercice de la section précédente.

Depuis [le site du cours](https://caltuli.online) à l'url <https://caltuli.online>, on peut récupérer le fichier de configuration de ce circuit via le lien étiqueté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et forcé avec un forçage cosinusoidal ».

7.4 Oscillateur harmonique non amorti et libre : Circuit théorique LC sans générateur et avec condensateur chargé initialement

On reprend le circuit de la section précédente puis on ouvre l'interrupteur.

Expliquer pourquoi on obtient de telles allures pour les deux courbes de la capture d'écran suivante :

