CORRECTION DES EXERCICES SUR LES OSCILLATEURS HARMONIQUES QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

1 Oscillateur harmonique non amorti et forcé par un forçage cosinusoïdal et résonance jusqu'à la rupture du système (*sections 4.3.1 et 4.3.2 du cours*)

1.1 Énoncé

1.1.1 Description de l'expérience

On reprend l'exemple du ressort disposé sur une surface horizontale sans frottement. Initialement fixé à un mur immobile, on modifie cette configuration en introduisant un mur qui n'est plus rigide mais capable de vibrer. Cette modification est réalisée pour illustrer l'effet d'une force externe oscillante sur le système. Le second membre de l'équation différentielle est maintenant une fonction cosinusoïdale $g(t) = B.\cos(\mu.t+\psi) = \mathscr{R}e\left(Be^{i\psi}e^{i\mu t}\right)$:

$$E \,:\, y'' + \omega^2.y = B.\cos(\mu.t+\psi) = \mathscr{R}e\left(Be^{i\psi}e^{i\mu t}\right)$$

On cherche une solution particulière de cette équation E.
Pour ce faire, on cherche une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation complexe $E_\mathbb{C}$ associée :

$$E_\mathbb{C} \,:\, y'' + \omega^2.y = Be^{i\psi}e^{i\mu t}$$

En effet, si $y_{p,\mathbb{C}}(t)$ est une solution de $E_\mathbb{C}$, alors $y_p = \mathscr{R}e\left(y_{p,\mathbb{C}}(t)\right)$ est une solution particulière de E.

Le second membre de $E_\mathbb{C}$ est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, c'est le cas avec :

$$\begin{cases} P(t) = Be^{i\psi} & \text{(C'est même une fonction polynomiale constante.)} \\ \lambda = i\mu \end{cases}$$

L'équation caractéristique de $E_\mathbb{C}$ est l'équation suivante d'inconnue x :

$$x^2 + \omega^2 = 0$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont donc $-i\omega$ et $i\omega$.

1.1.2 Premier cas : La pulsation propre du forçage est différente de la pulsation propre de l'oscillateur (absence de résonance)

Dans ce cas, $\mu \neq \omega$ et donc $i\mu$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique.

1) En utilisant la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », déterminer sous quelle forme chercher une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation

$$E_\mathbb{C} \,:\, y'' + \omega^2.y = Be^{i\psi}e^{i\mu t}$$

2) En déduire des expressions de $y'_{p,\mathbb{C}}$ et de $y''_{p,\mathbb{C}}$.
3) En raisonnant par équivalence, en déduire une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation $E_\mathbb{C}$.
4) En déduire une solution particulière y_p de l'équation E.
5) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation E.
6) En déduire une expression de la position $x(t)$ de la masse et tracer la en utilisant *Python* dans le cas particulier suivant :
   - La masse fait 2 kg.
   - La constante du ressort vaut 8 N/m.
   - À l'instant initial, le ressort est étiré de 40 cm.
   - À l'instant initial, la vitesse de la masse est nulle.
   - $B = 2$
   - $\Psi = 0$
   - $\mu = \sqrt{2}$

1.1.3 Deuxième cas : La pulsation propre du forçage est égale à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance)

Dans ce cas, $\mu = \omega$ et donc $i\mu$ est une racine simple de l'équation caractéristique.

7) En utilisant la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », déterminer sous quelle forme chercher une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation

$$E_{\mathbb{C}} \ : \ y'' + \omega^2.y = Be^{i\Psi}e^{i\mu t}$$

8) En déduire des expressions de $y'_{p,\mathbb{C}}$ et de $y''_{p,\mathbb{C}}$.
9) En raisonnant par équivalence, en déduire une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ de l'équation $E_{\mathbb{C}}$.
10) En déduire une solution particulière y_p de l'équation E.
11) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation E.
12) En déduire que le ressort va finir par casser.
13) En déduire une expression de la position $x(t)$ de la masse et tracer la en utilisant *Python* dans le cas particulier suivant :
    - La masse fait 2 kg.
    - La constante du ressort vaut 8 N/m.
    - À l'instant initial, le ressort est étiré de 40 cm.
    - À l'instant initial, la vitesse de la masse est nulle.
    - $B = 2$
    - $\Psi = 0$

Dans l'article *Wikipédia* « Pont de Broughton », on lit :

14) *« Le pont de Broughton édifié en 1826 pour le franchissement de l'Irwell entre Broughton et Pendleton (aujourd'hui deux faubourgs de Salford, dans la banlieue du Grand Manchester), dans le Lancashire, était l'un des premiers ponts suspendus construits en Europe. Le 12 avril 1831, alors que la troupe marchait au pas cadencé sur cet ouvrage, il se produisit un phénomène de résonance mécanique qui provoqua la ruine du pont. Un pivot de l'une des chaînes de suspension avait cédé, provoquant la chute du tablier vers l'une des extrémités, jetant 40 des soldats à la rivière. »*

En utilisant le modèle du ressort, expliquer comment une telle catastrophe a pu arriver.

Image provenant de l'article *Wikipédia* « Pont de Broughton ».

1.2 Correction

1.2.1 Premier cas : La pulsation propre du forçage est différente de la pulsation propre de l'oscillateur (absence de résonance)

Dans ce cas, $\mu \neq \omega$ et donc $i\mu$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique.

1) D'après la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », on cherche une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ sous la forme :

$y_{p,\mathbb{C}}(t) = Q(t).e^{i\mu t}$ avec Q une fonction polynomiale de même degré que $P(t) = Be^{i\Psi}$, c'est-à-dire une constante qu'on note encore Q

2)

$$y'_{p,\mathbb{C}}(t) = i\mu Q.e^{i\mu t}$$
$$y''_{p,\mathbb{C}}(t) = -\mu^2 Q.e^{i\mu t}$$

3)

$$\begin{aligned}
y_{p,\mathbb{C}}(t) \text{ solution de } E_{\mathbb{C}} &\iff y''_{p,\mathbb{C}}(t) + \omega^2 . y_{p,\mathbb{C}}(t) = Be^{i\psi}e^{i\mu t} \\
&\iff \left(-\mu^2 Q.e^{i\mu t}\right) + \omega^2 . \left(Q.e^{i\mu t}\right) = Be^{i\psi}e^{i\mu t} \\
&\iff \left(-\mu^2 + \omega^2\right).Q.e^{i\mu t} = Be^{i\psi}e^{i\mu t} \\
&\iff \left(-\mu^2 + \omega^2\right).Q = Be^{i\psi} \\
&\iff Q = \frac{B}{\omega^2 - \mu^2}e^{i\psi} \\
&\iff y_{p,\mathbb{C}}(t) = \frac{B}{\omega^2 - \mu^2}.e^{i\psi}.e^{i\mu t}
\end{aligned}$$

4) Ainsi, $y_p(t) = \mathscr{R}e\left(y_{p,\mathbb{C}}(t)\right)$ est une solution particulière de E :

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \mathscr{R}e\left(y_{p,\mathbb{C}}(t)\right) \\
&= \mathscr{R}e\left(\frac{B}{\omega^2 - \mu^2}e^{i\psi}.e^{i\mu t}\right) \\
&= \frac{B}{\omega^2 - \mu^2}.\mathscr{R}e\left(e^{i(\mu t + \psi)}\right) \\
&= \frac{B}{\omega^2 - \mu^2}.\cos\left(\mu t + \psi\right)
\end{aligned}$$

5) L'ensemble des solutions de l'équation E est :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{B}{\omega^2-\mu^2}.\cos\left(\mu t + \psi\right) + A.\cos\left(\omega t + \phi\right) \end{array} \text{, avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[\right\}$$

6) La position $x(t)$ de la masse est donc de la forme :

$$x(t) = \frac{B}{\omega^2 - \mu^2}.\cos\left(\mu t + \psi\right) + A.\cos\left(\omega t + \phi\right) \text{ avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[$$

Avec l'application numérique, on obtient :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2}{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}.\cos\left(\sqrt{2}t\right) + A.\cos\left(2t + \phi\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{2}t\right) + A.\cos\left(2t + \phi\right)
\end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et ϕ.
Pour ce faire, on utilise les conditions initiales contenues dans la phrase de l'énoncé suivante :

« La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 40 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale. »

En effet, l'information contenue dans cette phrase se traduit mathématiquement en les deux égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Pour récapituler, on a donc :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) + A.\cos\left(2t + \phi\right) \\ x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{array} \right.}$$

On détermine A et ϕ :

$$\begin{aligned}
&x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) + A.\cos\left(2t + \phi\right) \\
&x'(t) = -\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) - 2A\sin\left(2t + \phi\right) \\
&x'(0) = 0 \\
&-\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2} \times 0\right) - 2A\sin\left(2 \times 0 + \phi\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\sin(\phi) = 0$$

$$\boxed{\phi = 0}$$

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) + A.\cos(2t)$$

$$x(0) = \frac{2}{5}$$

$$\cos\left(\sqrt{2}\times 0\right) + A.\cos(2\times 0) = \frac{2}{5}$$

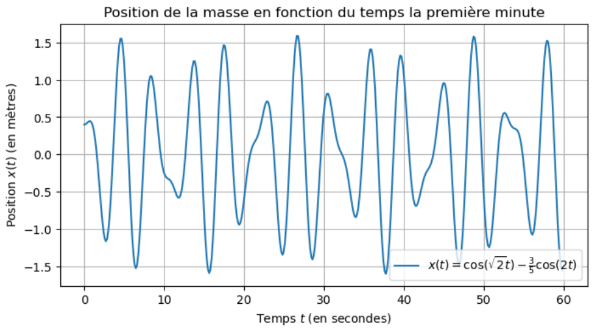
$$1 + A = \frac{2}{5}$$

$$\boxed{A = -\frac{3}{5}}$$

En définitive l'expression de la position $x(t)$ de la masse est :

$$\boxed{x(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{3}{5}.\cos(2t)}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition de la fonction x(t)
def x(t):
    return np.cos(np.sqrt(2) * t) - (3/5) * np.cos(2 * t)

# Création de l'intervalle de temps t de 0 à 60
t = np.linspace(0, 60, 400)

# Calcul des valeurs x pour chaque t
x_values = x(t)

# Création du graphique
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x_values, label=r'$x(t) = \cos(\sqrt{2}t) - \frac{3}{5}\cos(2t)$')
plt.title("Position de la masse en fonction du temps la première minute")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



1.2.2 Deuxième cas : La pulsation propre du forçage est égale à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance)

Dans ce cas, $\mu = \omega$ et donc $i\mu$ est une racine de l'équation caractéristique.

7) D'après la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », on cherche une solution particulière $y_{p,\mathbb{C}}$ sous la forme :

$y_{p,\mathbb{C}}(t) = t.Q(t).e^{i\omega t}$ avec Q une fonction polynomiale de même degré que $P(t) = Be^{i\psi}$, c'est-à-dire une constante qu'on note encore Q

8)

$$\begin{aligned} y'_{p,\mathbb{C}}(t) &= Q.\left(e^{i\omega t} + i\omega t e^{i\omega t}\right) \\ &= Q.(1 + i\omega t).e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{p,\mathbb{C}}(t) &= Q.\left[i\omega e^{i\omega t} + i\omega(1 + i\omega t).e^{i\omega t}\right] \\ &= Q.[i\omega + i\omega(1 + i\omega t)].e^{i\omega t} \\ &= Q.\left(2i\omega - \omega^2 t\right).e^{i\omega t} \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} y_{p,\mathbb{C}}(t) \text{ solution de } E_{\mathbb{C}} &\iff y''_{p,\mathbb{C}}(t) + \omega^2.y_{p,\mathbb{C}}(t) = Be^{i\psi}e^{i\omega t} \\ &\iff \left(Q.\left(2i\omega - \omega^2 t\right).e^{i\omega t}\right) + \omega^2.\left(t.Q.e^{i\omega t}\right) = Be^{i\psi}e^{i\omega t} \\ &\iff Q.\left(2i\omega - \omega^2 t + \omega^2 t\right).e^{i\omega t} = Be^{i\psi}e^{i\omega t} \\ &\iff 2i\omega Q.e^{i\omega t} = Be^{i\psi}e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 2i\omega Q = Be^{i\psi}\\
&\iff Q = \frac{B}{2i\omega}.e^{i\psi}\\
&\iff Q = \frac{-iB}{2\omega}.e^{i\psi}\\
&\iff y_{p,\mathbb{C}}(t) = \frac{-iBt}{2\omega}.e^{i\psi}.e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

10) Ainsi, $y_p(t) = \mathscr{R}e\left(y_{p,\mathbb{C}}(t)\right)$ est une solution particulière de E :

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \mathscr{R}e\left(y_{p,\mathbb{C}}(t)\right)\\
&= \mathscr{R}e\left(\frac{-iBt}{2\omega}.e^{i\psi}.e^{i\omega t}\right)\\
&= \frac{Bt}{2\omega}\mathscr{R}e\left(-i.e^{i(\omega t+\Psi)}\right)\\
&= \frac{Bt}{2\omega}\sin(\omega t+\Psi)
\end{aligned}$$

11) L'ensemble des solutions de l'équation E est :

$$\left\{\begin{array}{cccc} y: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & \frac{Bt}{2\omega}\sin(\omega t+\Psi) + A.\cos\left(\omega t+\phi\right)\end{array}\text{, avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[\right\}$$

12) La position $x(t)$ de la masse est donc de la forme :

$$x(t) = \frac{Bt}{2\omega}\sin(\omega t+\Psi) + A.\cos\left(\omega t+\phi\right) \text{ avec } A \text{ un réel strictement positif et } \phi \in [0;2\pi[$$

On en déduit que :

$$|x(t)| \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$$

Donc, comme le ressort ne peut pas être indéfiniment allongé, il va finir par casser.

13) On a précédemment obtenu que la position $x(t)$ de la masse est de la forme :

$$x(t) = \frac{Bt}{2\omega}\sin(\omega t+\Psi) + A.\cos\left(\omega t+\phi\right) \text{ avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[$$

Avec l'application numérique, on obtient :

$$x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t) + A.\cos\left(2t+\phi\right)$$

On détermine A et ϕ :

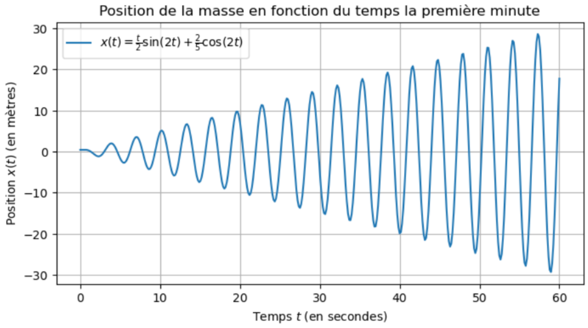
$$\begin{aligned}
&x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t) + A.\cos\left(2t+\phi\right)\\
&x'(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + t\cos(2t) - 2A.\sin\left(2t+\phi\right)\\
&x'(0) = 0\\
&\frac{1}{2}\sin(2\times 0) + 0\times\cos(2\times 0) - 2A.\sin\left(2\times 0+\phi\right) = 0\\
&\boxed{A.\sin\left(\phi\right) = 0}\\
&x(0) = \frac{2}{5}\\
&\frac{0}{2}\sin(2\times 0) + A.\cos\left(2\times 0+\phi\right) = \frac{2}{5}\\
&\boxed{A.\cos\left(\phi\right) = \frac{2}{5}}\\
&A > 0\\
&\boxed{\phi = 0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{5}}$$

En définitive l'expression de la position $x(t)$ de la masse est :

$$\boxed{x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t) + \frac{2}{5}.\cos(2t)}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition de la fonction x(t)
def x(t):
    return (t / 2) * np.sin(2 * t) + (2 / 5) * np.cos(2 * t)

# Création de l'intervalle de temps t de 0 à 60
t = np.linspace(0, 60, 400)

# Calcul des valeurs x pour chaque t
x_values = x(t)

# Création du graphique
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x_values, label=r'$x(t) = \frac{t}{2}\sin(2t) + \frac{2}{5}\cos(2t)$')
plt.title("Position de la masse en fonction du temps la première minute")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

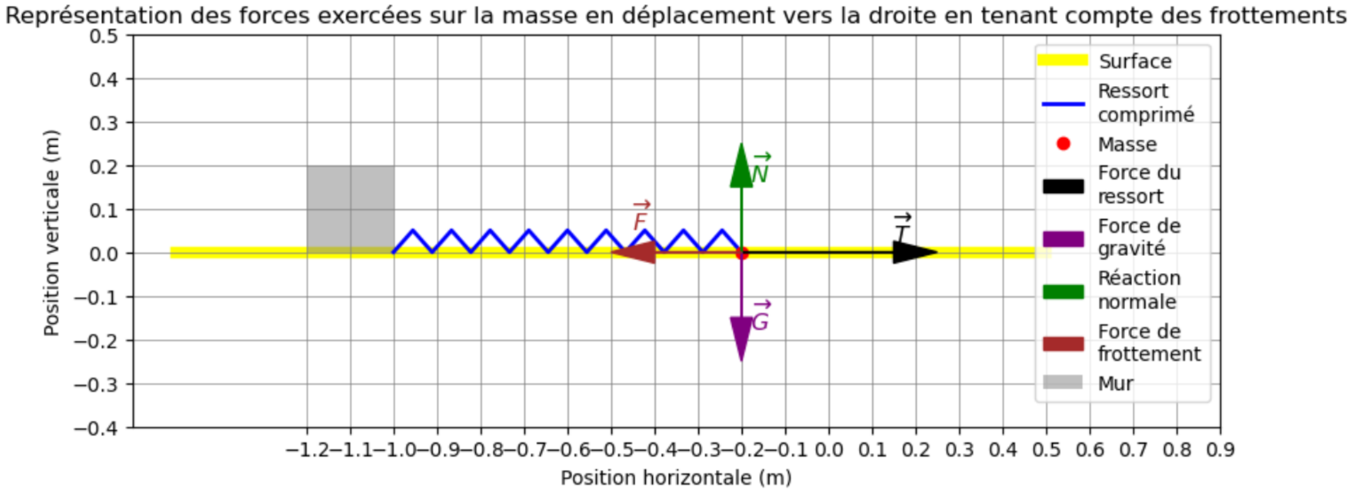


14) L'effondrement du pont de Broughton est un exemple de résonance mécanique, similaire au modèle du ressort analysé précédemment. Le rythme des pas des soldats marchant sur le pont a correspondu à la fréquence propre du pont, induisant une résonance qui a amplifié les oscillations jusqu'à provoquer la rupture d'une partie structurale et l'effondrement du pont.

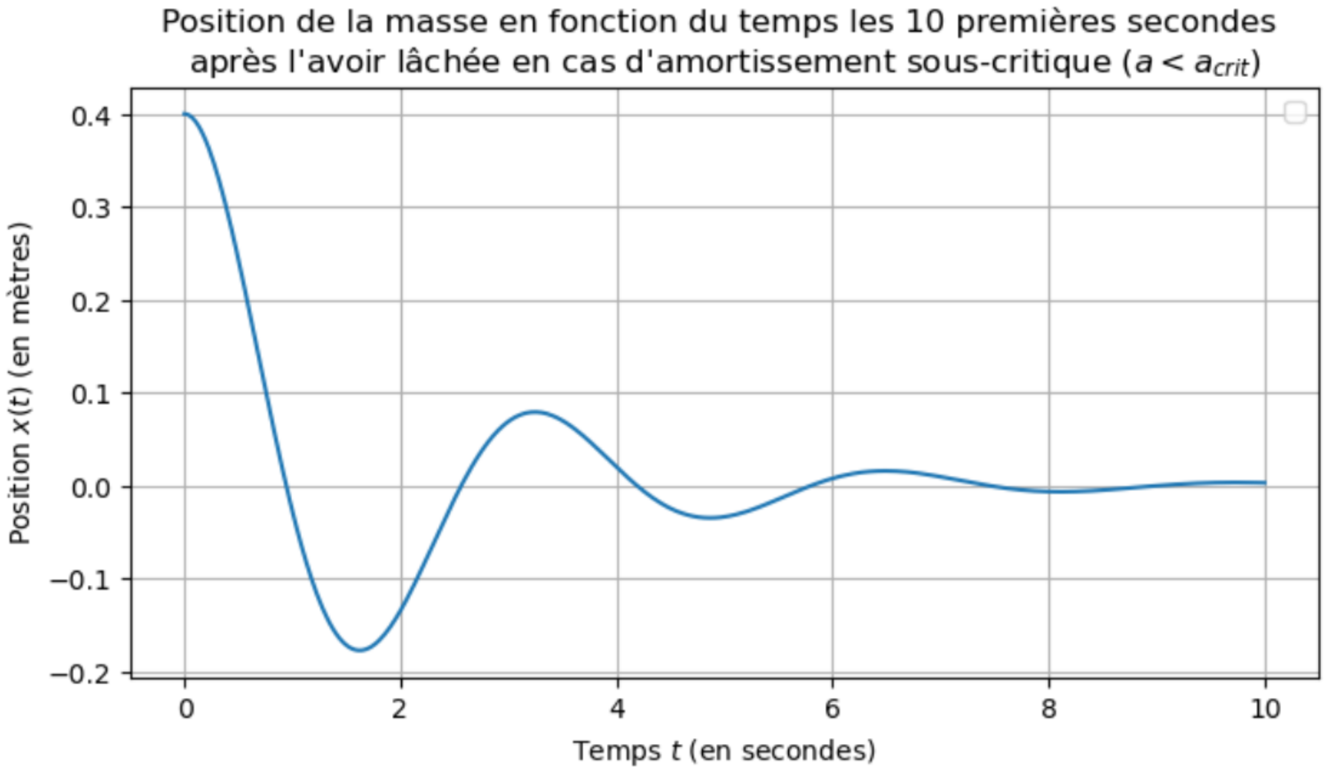
2 Exemple d'oscillateurs harmoniques amortis et libres (section 5.2 du cours)

2.1 Énoncé

On a déjà étudié un tel exemple d'oscillateur amorti et libre dans la partie II) du test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles » (le cinquième sur le site) :



On voit dans la figure suivante que l'on a obtenu un sous-amortissement :



1) Dans la figure précédente, à quoi voit-on qu'il s'agit d'un sous-amortissement ?
2) Pour découvrir un exemple d'amortissement critique et un exemple de sur-amortissement, refaire la partie II) du test type TOMIC « Étude de cas sur les équations différentielles » (le cinquième sur le site) dans chacun des deux cas suivants :
   a) $a = 8\ kg/s$
   b) $a = 8\sqrt{2}\ kg/s$
3) Tracer la position de la masse en fonction du temps dans chacun des cas précédents.
4) Refaire les deux questions précédentes avec une vitesse initiale de 1 m/s.

2.2 Correction

1) Il s'agit d'un sous-amortissement car le système oscille en convergeant vers sa position d'équilibre.

2) *a*) $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$\boxed{y'' + \frac{a}{m}.y' + \frac{k}{m}.y = 0}$$

L'équation caractéristique est :

$$x^2 + \frac{a}{m}x + \frac{k}{m} = 0$$

Son discriminant Δ est :

$$\Delta = \left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} = \frac{1}{m^2}\left(a^2 - 4km\right)$$

Avec $a = 8$, $m = 2$, $k = 8$, on obtient :

$$\Delta = \frac{1}{2^2}\left(8^2 - 4 \times 8 \times 2\right) = 0$$

L'unique racine de cette équation est :

$$-\frac{a}{2m} = -\frac{8}{2 \times 2} = -2$$

Il y a donc amortissement critique et $x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = e^{-2t}(At + B) \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
Pour ce faire, on utilise comme précédemment les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$x'(t) = e^{-2t}(-2At - 2B + A)$$

$$\begin{cases} B = 0,4 \\ -2B + A = 0 \end{cases}$$

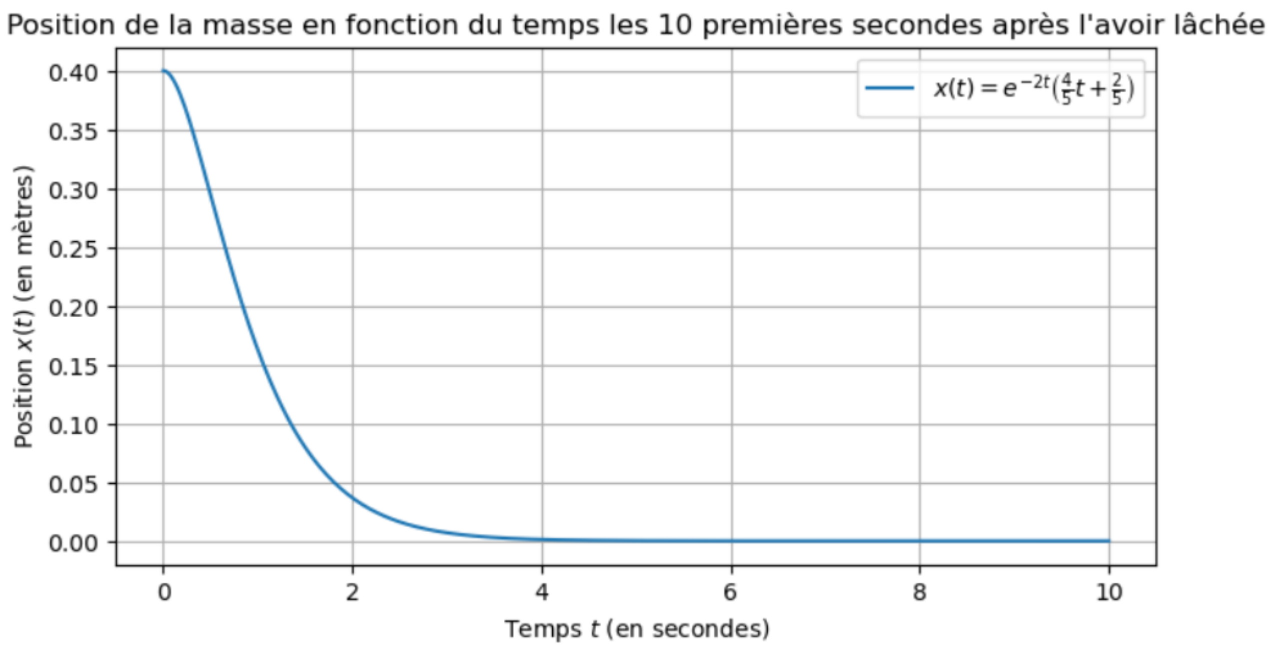
$$\begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

En définitive :

$$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{4}{5}t + \frac{2}{5}\right)$$

On trace via le code *Python* suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    return np.exp(-2 * t) * ((4/5)*t+(2/5))

t = np.linspace(0, 10, 400)

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x(t), label=r'$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{4}{5}t + \frac{2}{5}\right)$')
plt.title(r"Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



b) Avec $a = 8\sqrt{2}$, $m = 2$, $k = 8$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2^2}\left(\left(8\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 8\times 2\right)\\ &= 2\,(16-8)\\ &= 16\end{aligned}$$

Les deux racines de cette équation sont :

$$-\frac{a}{2m} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -2\sqrt{2} - 2 \qquad\qquad -\frac{a}{2m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -2\sqrt{2} + 2$$

Il y a donc un sur-amortissement et $x\,(t)$ est de la forme :

$$x\,(t) = Ae^{2\left(-\sqrt{2}-1\right)t} + Be^{2\left(-\sqrt{2}+1\right)t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
Pour ce faire, on utilise comme précédemment les conditions initiales :

$$\begin{cases} x\,(0) = 0,4 \\ x'\,(0) = 0 \end{cases}$$

$$x'\,(t) = 2A\left(-\sqrt{2}-1\right)e^{2\left(-\sqrt{2}-1\right)t} + 2B\left(-\sqrt{2}+1\right)e^{2\left(-\sqrt{2}+1\right)t}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ A\left(-\sqrt{2}-1\right) + B\left(-\sqrt{2}+1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ -\sqrt{2}\,(A+B) = A - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ A - B = -0,4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{0,4\left(1-\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{5} \\ B = \frac{2}{5} - \frac{1-\sqrt{2}}{5} = \frac{1+\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

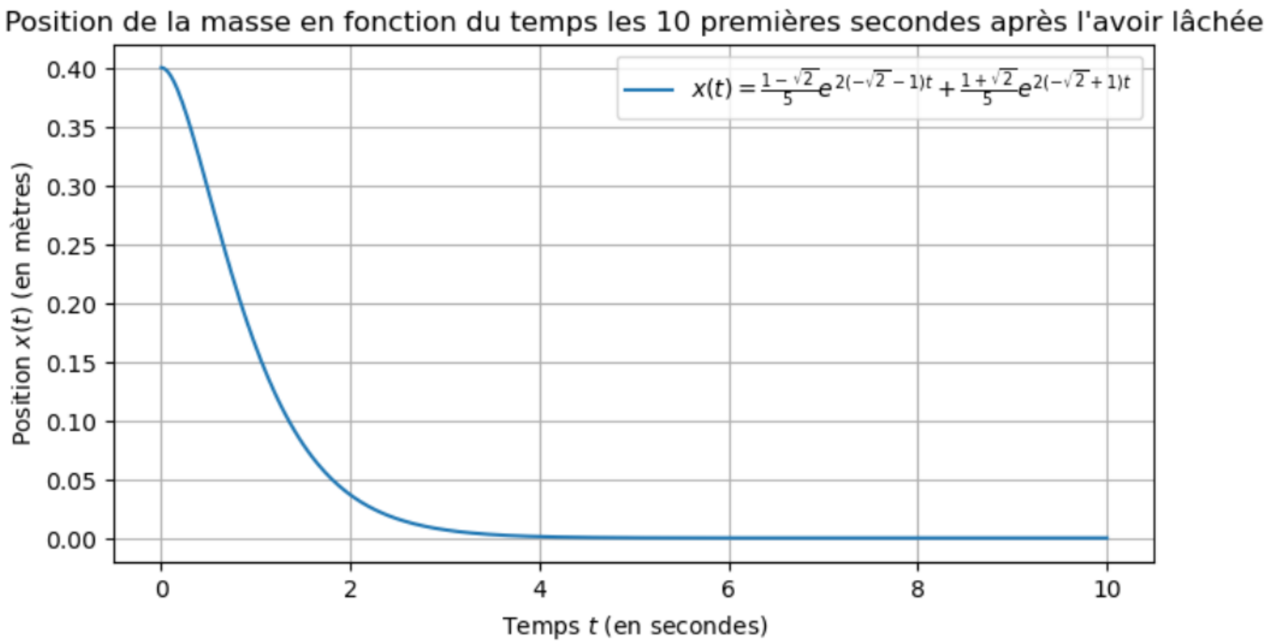
$$\begin{cases} A = \frac{1-\sqrt{2}}{5} \\ B = \frac{1+\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

En définitive :

$$x(t) = \frac{1-\sqrt{2}}{5}e^{2\left(-\sqrt{2}-1\right)t} + \frac{1+\sqrt{2}}{5}e^{2\left(-\sqrt{2}+1\right)t}$$

On trace via le code *Python* suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    term1 = (1 - np.sqrt(2)) / 5 * np.exp(2 * (-np.sqrt(2) - 1) * t)
    term2 = (1 + np.sqrt(2)) / 5 * np.exp(2 * (-np.sqrt(2) + 1) * t)
    return term1 + term2

t = np.linspace(0, 10, 400)

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x(t), label=r'$x(t) = \frac{1-\sqrt{2}}{5}e^{2(-\sqrt{2}-1)t} + \frac{1+\sqrt{2}}{5}e^{2(-\sqrt{2}+1)t}$')
plt.title(r"Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



3) Déja fait dans réponse à la question précédente.

4) *a*) On a déjà :

$$x(t) = e^{-2t}(At+B) \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
Pour ce faire, on utilise comme précédemment les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$x'(t) = e^{-2t}(-2At - 2B + A)$$

$$\begin{cases} B = 0,4 \\ -2B + A = 1 \end{cases}$$

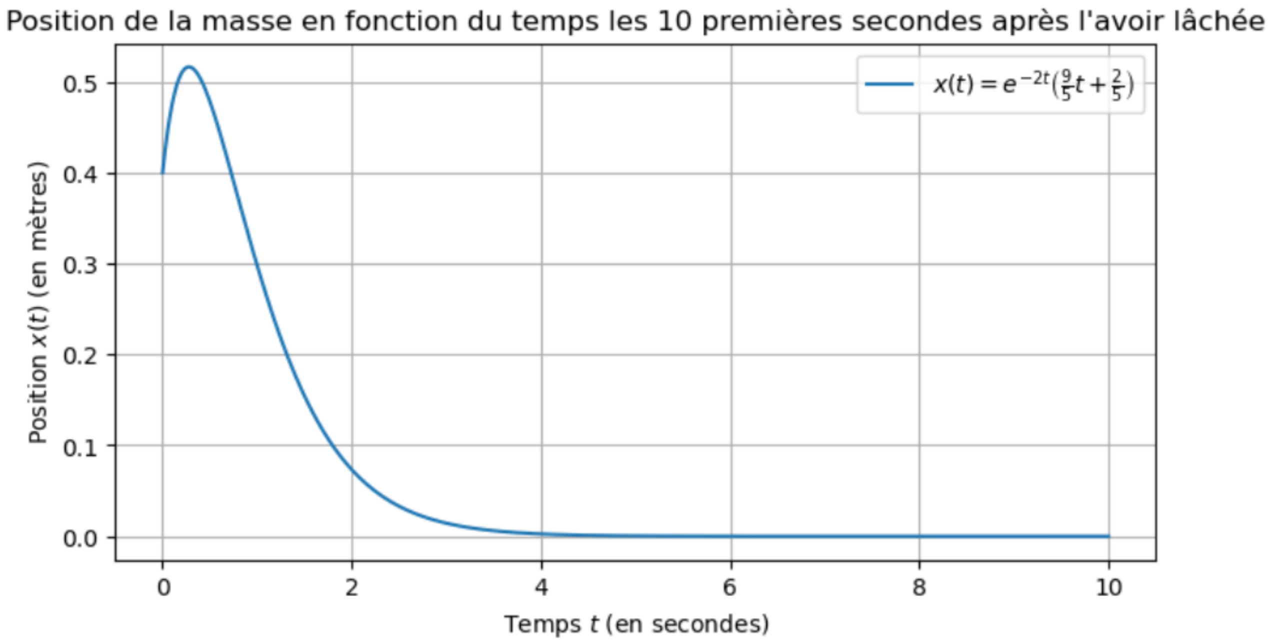
$$\begin{cases} B = \frac{2}{5} \\ A = \frac{9}{5} \end{cases}$$

En définitive :

$$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{9}{5}t + \frac{2}{5}\right)$$

On trace via le code *Python* suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    return np.exp(-2 * t) * ((9 / 5) * t + (2 / 5))

t = np.linspace(0, 10, 400)

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x(t), label=r'$x(t) = e^{-2t}\left(\frac{9}{5}t + \frac{2}{5}\right)$')
plt.title(r"Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



b) On a déjà :

$$x(t) = Ae^{2(-\sqrt{2}-1)t} + Be^{2(-\sqrt{2}+1)t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

Il ne reste alors qu'à déterminer ces deux constantes A et B.
Pour ce faire, on utilise comme précédemment les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0,4 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$x'(t) = 2A\left(-\sqrt{2}-1\right)e^{2(-\sqrt{2}-1)t} + 2B\left(-\sqrt{2}+1\right)e^{2(-\sqrt{2}+1)t}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ A\left(-\sqrt{2}-1\right) + B\left(-\sqrt{2}+1\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ -\sqrt{2}(A+B) = \frac{1}{2} + A - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 0,4 \\ A - B = -0,4\sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{0,4(1-\sqrt{2})}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{4} = \frac{-1-4\sqrt{2}}{20} \\ B = \frac{2}{5} - \frac{-1-4\sqrt{2}}{20} + \frac{1}{2} = \frac{9+4\sqrt{2}}{20} \end{cases}$$

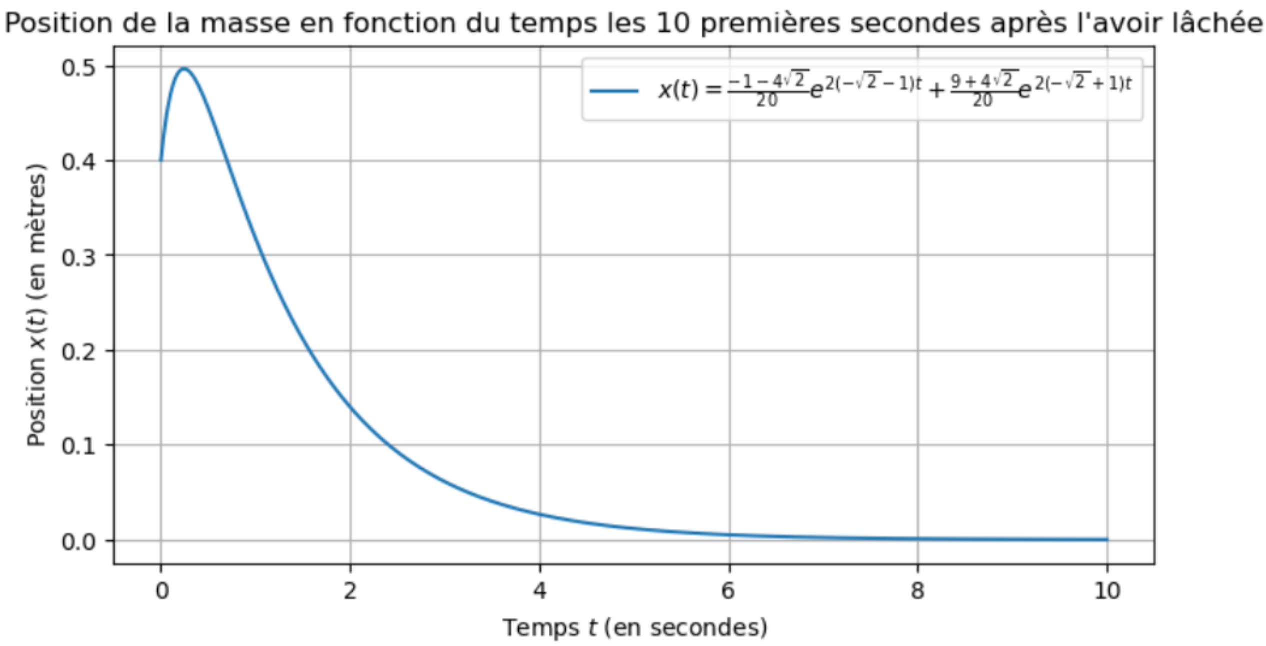
$$\begin{cases} A = \frac{-1-4\sqrt{2}}{20} \\ B = \frac{9+4\sqrt{2}}{20} \end{cases}$$

En définitive :

$$x(t) = \frac{-1-4\sqrt{2}}{20}e^{2(-\sqrt{2}-1)t} + \frac{9+4\sqrt{2}}{20}e^{2(-\sqrt{2}+1)t}$$

On trace via le code *Python* suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    A = (-1 - 4 * np.sqrt(2)) / 20
    B = (9 + 4 * np.sqrt(2)) / 20
    term1 = A * np.exp(2 * (-np.sqrt(2) - 1) * t)
    term2 = B * np.exp(2 * (-np.sqrt(2) + 1) * t)
    return term1 + term2

t = np.linspace(0, 10, 400)

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t, x(t), label=r'$x(t) = \frac{-1-4\sqrt{2}}{20}e^{2(-\sqrt{2}-1)t} + \frac{9+4\sqrt{2}}{20}e^{2(-\sqrt{2}+1)t}$')
plt.title(r"Position de la masse en fonction du temps les 10 premières secondes après l'avoir lâchée")
plt.xlabel('Temps $t$ (en secondes)')
plt.ylabel('Position $x(t)$ (en mètres)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



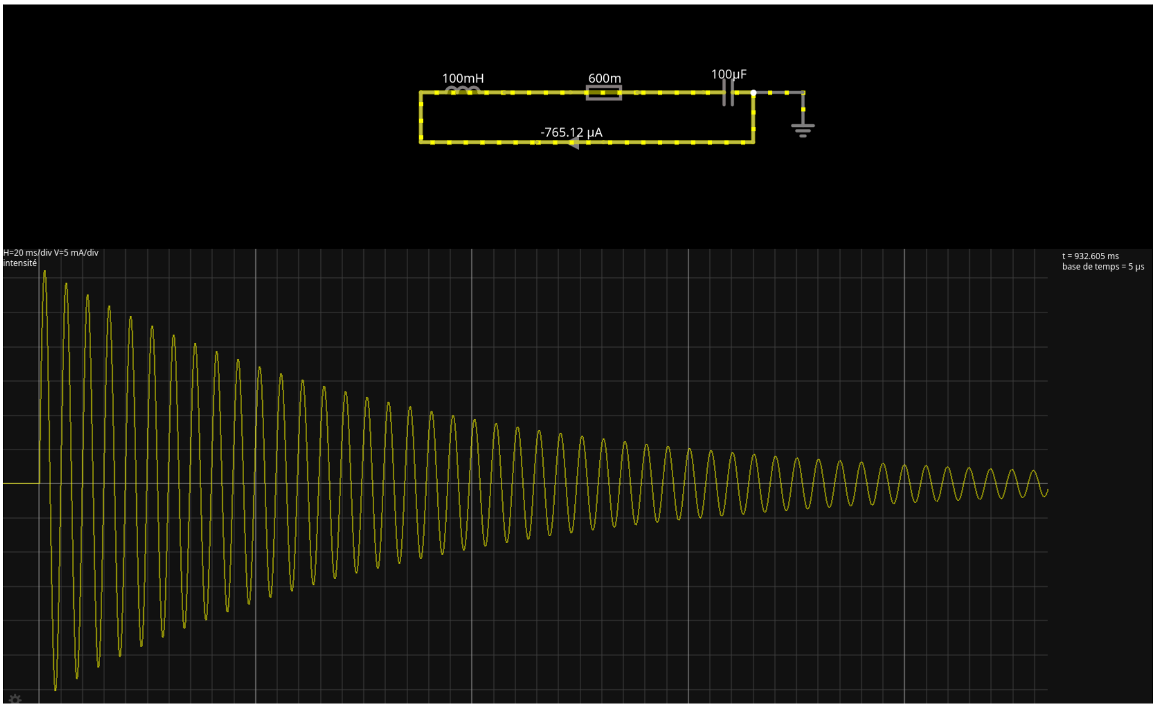
3 Oscillateur harmonique amorti non forcé : Circuit RLC en série sans générateur avec condensateur chargé initialement (section 7.2 du cours)

3.1 Énoncé

Le circuit représenté dans la capture d'écran ci-dessous comporte une seule maille avec :

- une bobine d'inductance $L = 100\ mH$,
- une résistance R de $600\ m\Omega$,
- un condensateur de capacité $C = 100\ \mu F$.

Initialement, le courant dans le circuit est nul et le condensateur est chargé avec une charge U_0 de $-1\ V$ (avec la même orientation que sur la capture d'écran).
On souhaite déterminer une expression $i(t)$ du courant en ampères en une section de ce circuit (avec la même orientation que sur la capture d'écran).



1) a) Rappeler la relation liant la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine et l'intensité $i(t)$ du courant qui la parcourt.
   b) Rappeler la relation liant la tension $u_R(t)$ aux bornes de la résistance et l'intensité $i(t)$ du courant qui la parcourt.
   c) Rappeler la relation liant la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et l'intensité $i(t)$ du courant qui le parcourt.
2) En appliquant la loi des mailles, déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont $i(t)$ est solution.
3) Résoudre cette équation (i.e. Déterminer toutes ses solutions).
4) *a)* Que vaut $i(0)$?
   b) En commençant par déterminer $u_L(0)$ en utilisant la loi des mailles pour $t = 0$, déterminer $i'(0)$.
   c) Déterminer une expression de $i(t)$.
5) *a)* Suivre les étapes suivantes pour simuler le circuit électrique susmentionné via l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » :
   - Se rendre sur le site du cours à l'url `https://caltuli.online`.
   - Cliquer sur le lien étiquetté « Falstad Circuit Simulator » dans le titre de section « Fichiers de configuration pour le simulateur de circuit électrique Falstad Circuit Simulator » afin d'accéder à l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » à l'url `https://www.falstad.com/circuit`.
   - Depuis le site du cours à l'url `https://caltuli.online`, ouvrir le fichier de configuration via le lien étiquetté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et libre ».
   - Copier l'intégralité de ce fichier de configuration dans le presse-papier en utilisant probablement les raccourcis « `ctrl + a` » puis « `ctrl + c` ».
   - Sélectionner l'item « `Importer depuis texte...` » du menu déroulant « Fichier » de l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator » à l'url `https://www.falstad.com/circuit`.
   - Sélectionner la zone de saisie de la fenêtre qui apparaît puis y recopier le contenu du fichier de configuration susmentionné en utilisant probablement le raccourci « `ctrl + v` ».

- Cliquer sur le bouton « `OK` » de la fenêtre précédente pour simuler enfin le circuit électrique précédent.

b) Faire tracer par le simulateur en ligne la courbe de l'intensité en cliquant sur bouton « Run/STOP ».

c) Écrire un code *Python* dans l'interface de *Jupyter* pour tracer la courbe de l'intensité avec l'expression obtenue précédemment afin de vérifier qu'elle correspond bien à celle obtenue par le simulateur.

6) *a*) Déterminer la valeur R_{crit} de R pour laquelle la décharge est la plus rapide.

b) Déterminer une expression de l'intensité $i(t)$ avec cette nouvelle valeur R_{crit} de R.

c) Simuler le circuit comme précemment avec cette nouvelle valeur R_{crit} de R.

d) Vérifier comme précédemment en traçant dans l'interface de *Jupyter* la courbe de l'intensité correspondant à cette nouvelle valeur R_{crit} de R et en la comparant avec celle obtenue par le simulateur.

7) Refaire les questions précédentes avec une valeur de R qui correspond à un sur-amortissement.

3.2 Correction

1) *a*)

$$\boxed{u_L(t) = Li'(t)}$$

b)

$$\boxed{u_R(t) = Ri(t)}$$

c)

$$\boxed{u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds}$$

2) Via la loi des mailles, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) &= 0 \\
Li'(t) + Ri(t) + u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds &= 0 \\
Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) &= 0 \quad \text{(en dérivant par rapport au temps)} \\
i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) &= 0
\end{aligned}$$

En définitive, l'intensité $i(t)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante d'inconnue y :

$$\boxed{y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC}y = 0}$$

3) Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants, on utilise la section « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles ».

L'équation caractéristique associée est l'équation suivante d'inconue x :

$$x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$$

On calcule son discrimant Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{LC} \\
&= \frac{1}{L^2}\frac{R^2C - 4L}{C}
\end{aligned}$$

Δ est du même signe que $R^2C - 4L$ et :

$$R^2C - 4L = 0{,}6^2 \times 10^{-4} - 4 \times 0{,}1 < 0$$

Le **discriminant** Δ du trinôme $x^2+\frac{R}{L}x+\frac{1}{LC}$ est **strictement négatif** donc les solutions de l'équation caractéristique sont les deux nombres complexes conjugués que l'on calcule maintenant :

$$\frac{-\frac{R}{L}-i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1}=\boxed{-\frac{R}{2L}-i\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{C}}} \qquad \frac{-\frac{R}{L}+i\sqrt{-\Delta}}{2\times 1}=\boxed{-\frac{R}{2L}+i\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{C}}}$$

On note $\alpha \pm i\omega$ ces deux racines. Autrement dit, on note :

$$\boxed{\begin{cases}\alpha=-\frac{R}{2L}\\ \omega=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{C}}\end{cases}}$$

Donc, en notant $\alpha \pm i\omega$ ces deux racines, l'ensemble des solutions (à valeurs réelles) de l'équation différentielle est :

$$\mathscr{S}_H^{\mathbb{R}}=\left\{\begin{array}{rccl} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & e^{\alpha t}\left(C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\right)\end{array},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}\right\}$$

Autrement dit, l'expression générale des solutions de l'équation différentielle est :

$$y(t)=e^{\alpha t}\left(C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\right) \text{ avec } C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

Cependant, on a vu dans ce cours sur les oscillateurs harmoniques qu'il est préférable dans ce contexte d'écrire l'expression générale des solutions de l'équation différentielle via une fonction cosinusoïdale sous la forme suivante afin de mieux interpréter ces solutions :

$$\boxed{y(t)=Ae^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\phi\right) \text{ avec } A\geq 0,\ \phi\in[0;2\pi[}$$

4) *a*) Directement d'après l'énoncé, on a :

$$\boxed{i(0)=0}$$

b) Via la loi des mailles, on obtient :

$$\begin{aligned} u_L(t)+u_R(t)+u_C(t)&=0\\ u_L(0)+u_R(0)+u_C(0)&=0\\ u_L(0)+R.i(0)+u_C(0)&=0 \quad \text{(d'après la loi d'Ohm)}\\ u_L(0)+R\times 0-1&=0 \quad \text{(d'après l'énoncé)}\\ u_L(0)&=1\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} u_L(t)&=Li'(t)\\ u_L(0)&=Li'(0)\\ i'(0)&=\frac{u_L(0)}{L}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{i'(0)=\frac{1}{L}}$$

c) D'après les trois questions précédentes, il s'agit de déterminer $A\geq 0$ et $\phi\in[0;2\pi[$ tels que :

$$\begin{cases} i(t)=Ae^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\phi\right)\\ i(0)=0\\ i'(0)=\frac{1}{L}\end{cases} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases}\alpha=-\frac{R}{2L}\\ \omega=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{C}}\end{cases}$$

On détermine une expression de la dérivée de l'intensité :

$$i'(t)=\alpha Ae^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\phi\right)-\omega Ae^{\alpha t}\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

Avec les conditions initiales, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} i\,(0)=0 \\ i'\,(0)=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Ae^{\alpha\times 0}\cos\left(\omega\times 0+\phi\right)=0 \\ \alpha Ae^{\alpha\times 0}\cos\left(\omega\times 0+\phi\right)-\omega Ae^{\alpha\times 0}\sin\left(\omega\times 0+\phi\right)=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\cos\left(\phi\right)=0 \\ \alpha A\cos\left(\phi\right)-\omega A\sin\left(\phi\right)=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\phi\right)=0 \quad \text{(car } A\neq 0 \text{ sinon on aurait } i'\,(0)=0\text{)} \\ -\omega A\underbrace{\sin\left(\phi\right)}_{=\pm 1}=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \phi=\frac{\pi}{2} \text{ ou } \phi=\frac{3\pi}{2} \\ \sin\left(\phi\right)\leq 0 \\ -\omega A\underbrace{\sin\left(\phi\right)}_{=-1}=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \phi=\frac{3\pi}{2} \\ \omega A=\frac{1}{L} \end{array}\right.$$

Donc :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \phi=\frac{3\pi}{2} \\ A=\frac{1}{\omega L} \end{array}\right.}$$

En définitive :

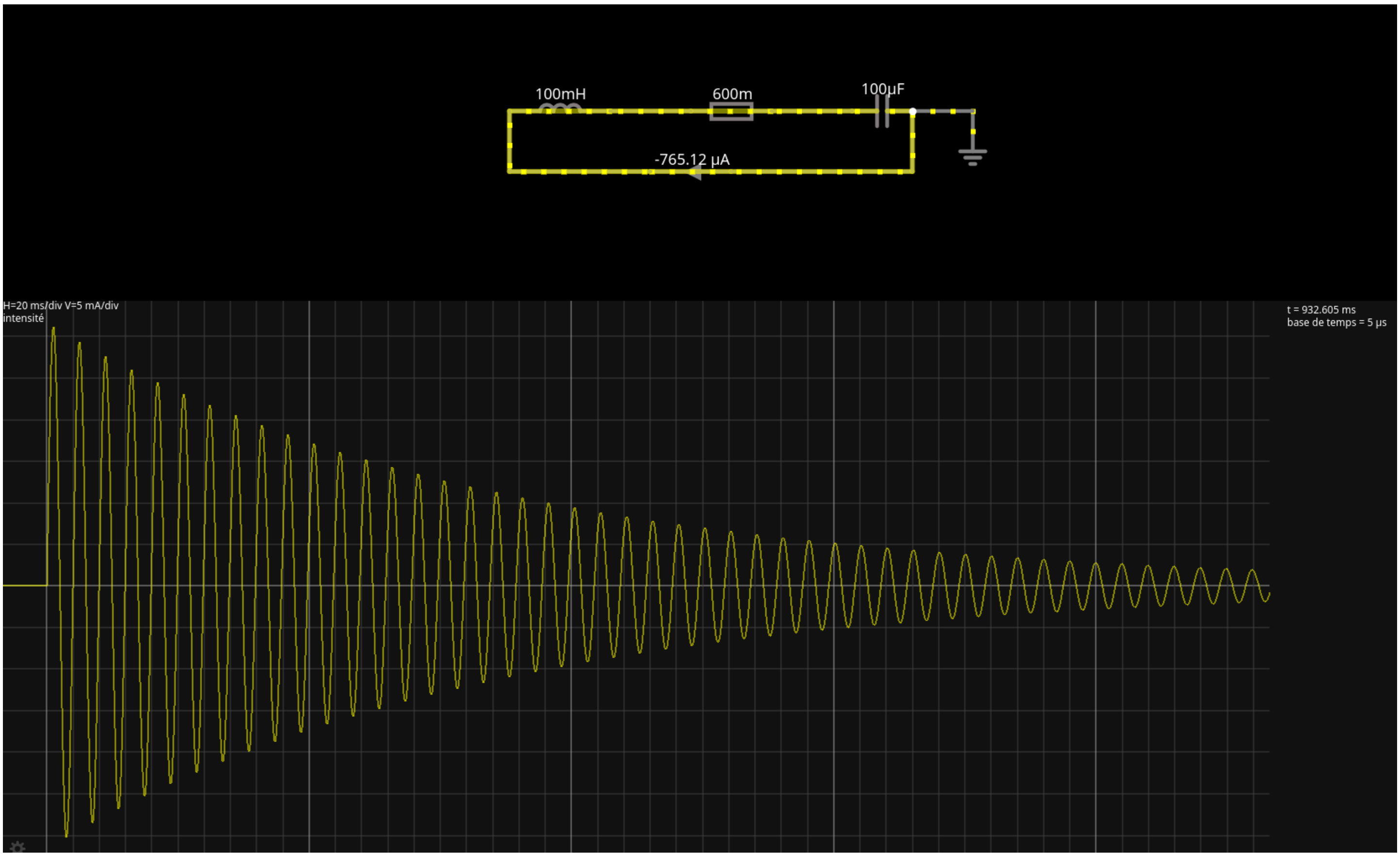
$$\boxed{i\,(t)=\frac{-U_0}{\omega L}e^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\frac{3\pi}{2}\right)} \qquad \text{où on a noté } \left\{\begin{array}{l} U_0=-1 \\ \alpha=-\frac{R}{2L} \\ \omega=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{C}} \end{array}\right.$$

5) a)b)c) Via le code *Python* suivant, on trace la courbe de l'intensité avec l'expression obtenue précédemment afin de vérifier qu'elle correspond bien à celle obtenue par le simulateur :

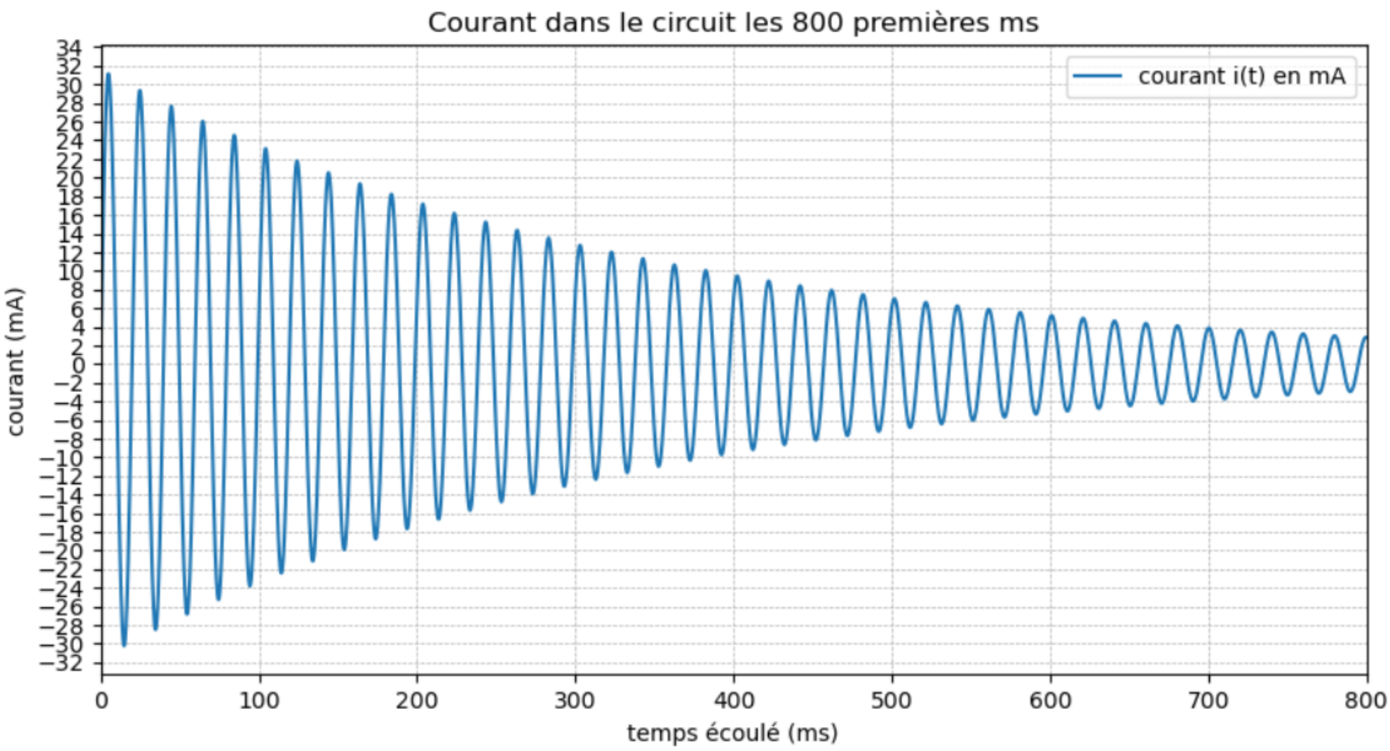
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as ticker

# constantes du circuit
L = 0.1  # inductance en H
R = 0.6  # resistance en Ohm
C = 1e-4  # capacité en F
U_0 = -1  # charge initiale aux bornes du condensateur en V

# fréquence angulaire
omega = 1/(2*L) * np.sqrt((4*L - R**2 * C) / C)

# coefficient d'amortissement
alpha = -R / (2*L)

# temps
t = np.linspace(0, 0.8, 4000)

# courant en A en fonction du temps
i_t = (-U_0 / (omega * L)) * np.exp(alpha * t) * np.cos(omega * t + (3 * np.pi / 2))


fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
ax.plot(t * 1000, i_t * 1000, label='courant i(t) en mA')
ax.set_title('Courant dans le circuit les 800 premières ms')
ax.set_xlabel('temps écoulé (ms)')
ax.set_ylabel('courant (mA)')
ax.xaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(100))
ax.yaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(2))
ax.set_xlim(0, 800)
```

```
ax.grid(True, which='both', linestyle='--', linewidth=0.5)
ax.legend()
plt.show()
```

Les captures d'écran suivantes montrent que l'expression obtenue précédemment correspond bien à la simulation :



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator ».



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.

6) *a*) La valeur de R pour laquelle la décharge est la plus rapide est la valeur pour laquelle $\Delta = 0$. Et :

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\iff \frac{1}{L^2}\frac{R^2C-4L}{C} = 0\\ &\iff R^2C-4L=0\\ &\iff R^2C = 4L\\ &\iff R^2 = \frac{4L}{C}\\ &\iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\end{aligned}$$

La valeur de R pour laquelle la décharge est la plus rapide est :

$$\boxed{R_{\text{crit}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Avec $L = 10^{-1}$ et $C = 10^{-4}$, on obtient :

$$\begin{aligned}R_{\text{crit}} &= 2\sqrt{\frac{L}{C}}\\ &= 2\sqrt{\frac{10^{-1}}{10^{-4}}}\\ &= 2\sqrt{10^3}\\ &= 20\sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\boxed{R_{\text{crit}} = 20\sqrt{10}}$$

$$\boxed{63{,}245\,553\,200 \leq R_{\text{crit}} = 20\sqrt{10} < 63{,}245\,553\,201}$$

b) Avec $R = R_{\text{crit}}$, on a $\Delta = 0$ et l'unique racine de l'équation caractéristique est α. Donc, d'après la section « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », on a :

$$i(t) = e^{\alpha t}(C_1 t + C_2) \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{R_{\text{crit}}}{2L} \\ R_{\text{crit}} = 20\sqrt{10} \end{cases}$$

On détermine une expression de la dérivée de l'intensité :

$$\begin{aligned}i'(t) &= \alpha e^{\alpha t}(C_1 t + C_2) + e^{\alpha t}C_1\\ &= e^{\alpha t}(\alpha C_1 t + C_1 + C_2)\end{aligned}$$

Avec les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} i(0) = 0 \\ i'(0) = \frac{1}{L} \end{cases}$$

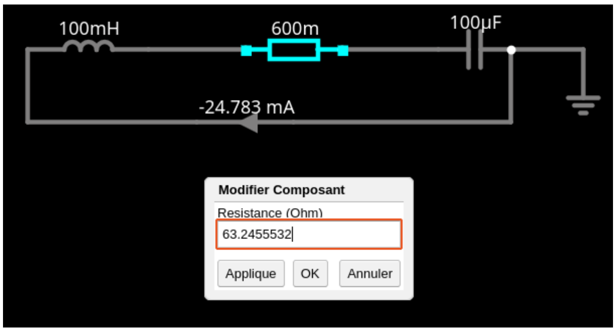
$$\begin{cases} e^{\alpha\times 0}(C_1\times 0 + C_2) = 0 \\ e^{\alpha\times 0}(\alpha C_1 \times 0 + C_1 + C_2) = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = \frac{1}{L} \end{cases}$$

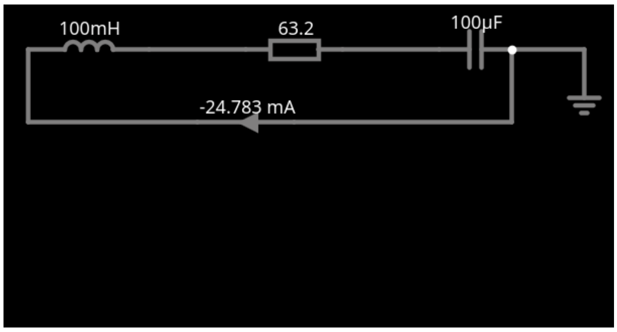
$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{L} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{-U_0 t}{L}e^{\alpha t}} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} U_0 = -1 \\ \alpha = -\frac{R_{\text{crit}}}{2L} \\ R_{\text{crit}} = 20\sqrt{10} \end{cases}$$

c)

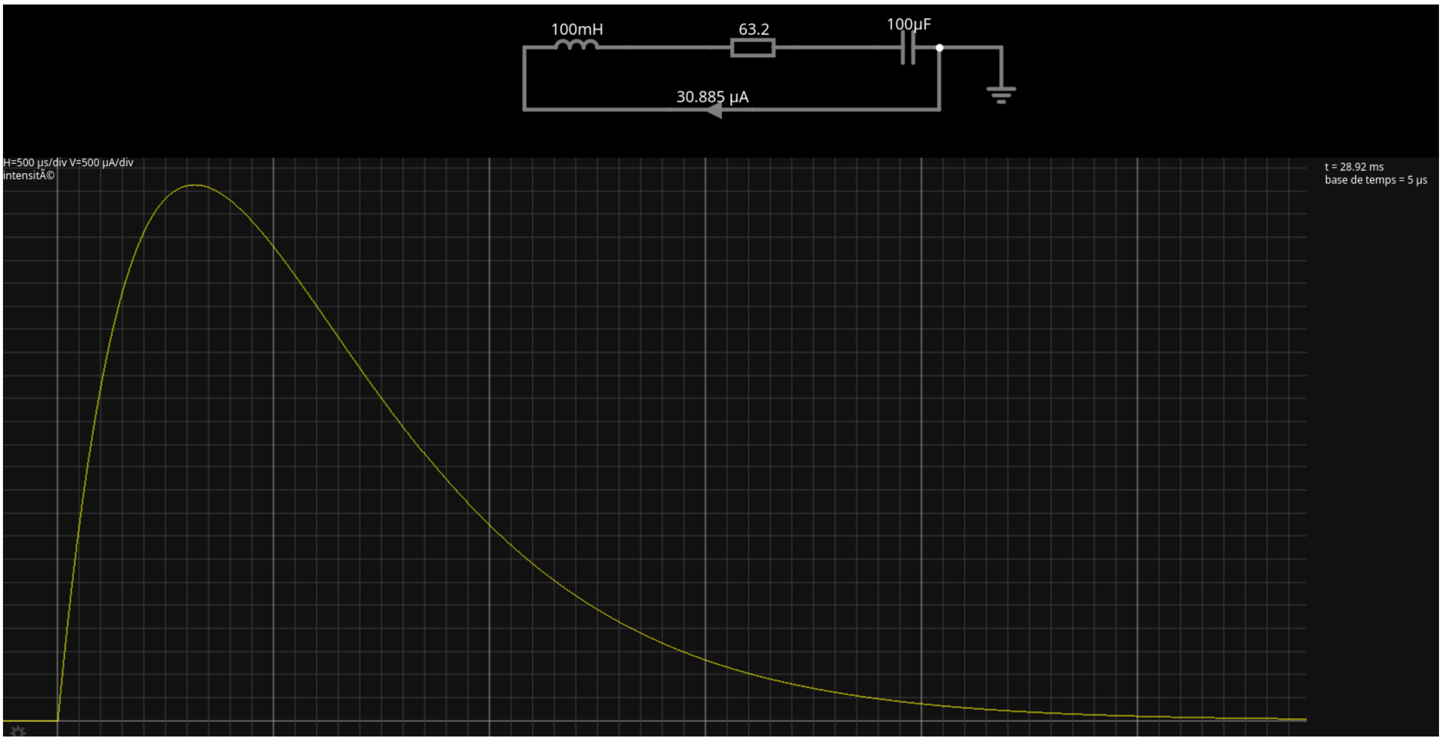


On double-clique sur la résistance et on saisit la valeur 63,245 553 2.



On clique sur le bouton OK pour obtenir une résistance avec une valeur approchée de la valeur critique.

On obtient maintenant la décharge suivante :



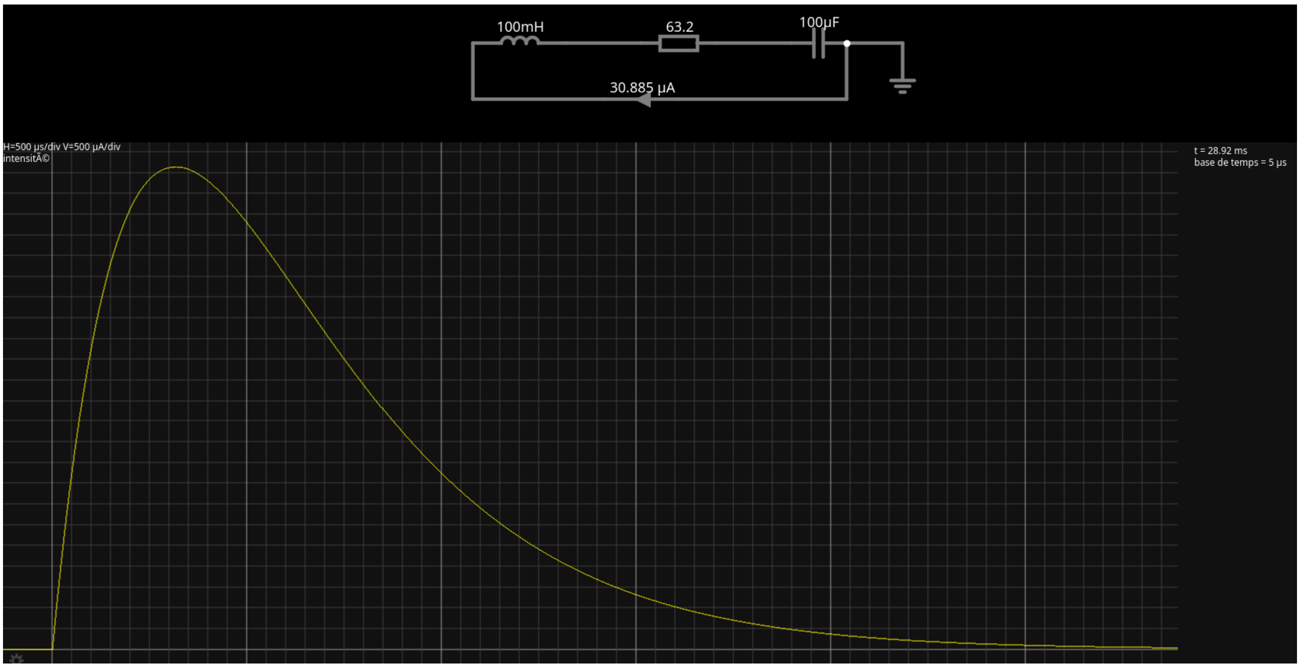
Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface de *Jupyter*, l'expression précédente et $R = 63{,}245\,553\,2$.

d) Via le code *Python* suivant, on trace la courbe de l'intensité avec l'expression obtenue précédemment afin de vérifier qu'elle correspond bien à celle obtenue par le simulateur :

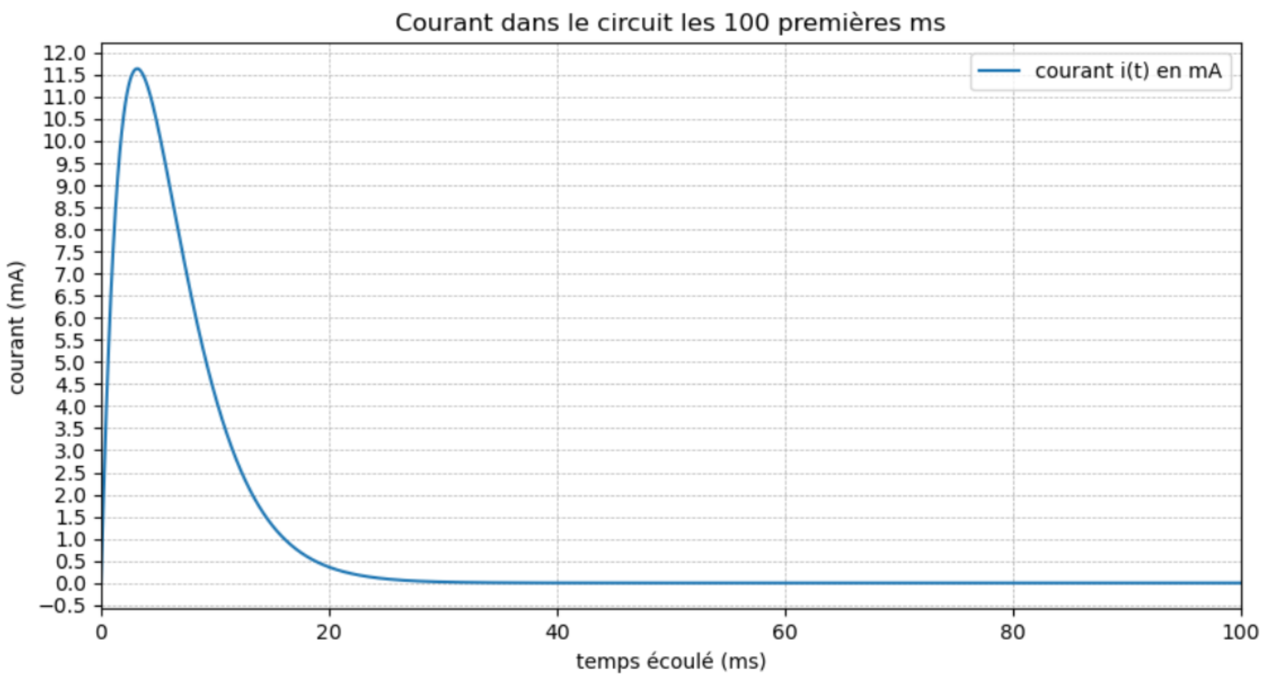
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as ticker

# constantes du circuit
L = 0.1  # inductance en H
R_crit = 20 * np.sqrt(10) # résistance en Ohm
C = 1e-4  # capacité en F
U_0 = -1  # charge initiale aux bornes du condensateur en V

# coefficient d'amortissement
alpha = -R_crit / (2*L)

# temps
t = np.linspace(0, 0.1, 4000)

# courant en A en fonction du temps
```

```
i_t = (-U_0 * t / L) * np.exp(alpha * t)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
ax.plot(t * 1000, i_t * 1000, label='courant i(t) en mA')
ax.set_title('Courant dans le circuit les 100 premières ms')
ax.set_xlabel('temps écoulé (ms)')
ax.set_ylabel('courant (mA)')
ax.xaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(20))
ax.yaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(0.5))
ax.set_xlim(0, 100)
ax.grid(True, which='both', linestyle='--', linewidth=0.5)
ax.legend()
plt.show()
```

Les captures d'écran suivantes montrent que l'expression obtenue précédemment correspond bien à la simulation :



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator ».



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.

7) On a par exemple :

$$R_{\text{crit}} = 20\sqrt{10} < 20\sqrt{16} = 20 \times 4 = 80$$

Donc on réitère l'étude précédente avec la nouvelle valeur R_s de R suivante :

$$\boxed{R_s = 80}$$

Dans ce cas, l'équation caractéristique admet les deux racines réelles disctinctes suivantes :

$$\frac{-\frac{R_s}{L} - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \boxed{-\frac{R_s}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}}} \qquad \frac{-\frac{R_s}{L} + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \boxed{-\frac{R_s}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}}}$$

D'après la section « Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », on a :

$$i(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} r_1 = -\frac{R_s}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ r_2 = -\frac{R_s}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ R_s = 80 \end{cases}$$

On détermine une expression de la dérivée de l'intensité :

$$i'(t) = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t}$$

Avec les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} i(0) = 0 \\ i'(0) = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{r_1 \times 0} + C_2 e^{r_2 \times 0} = 0 \\ r_1 C_1 e^{r_1 \times 0} + r_2 C_2 e^{r_2 \times 0} = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 (r_1 - r_2) = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 (r_1 - r_2) = \frac{1}{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)L} \\ C_2 = \frac{-1}{(r_1 - r_2)L} \end{cases}$$

Donc :

$$i(t) = \frac{1}{(r_2 - r_1)L}\left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right) \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} r_1 = -\frac{R_s}{2L} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ r_2 = -\frac{R_s}{2L} + \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ R_s = 80 \end{cases}$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{2\beta L}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = \frac{-R_s}{2L} \\ \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ R_s = 80 \end{cases}$$

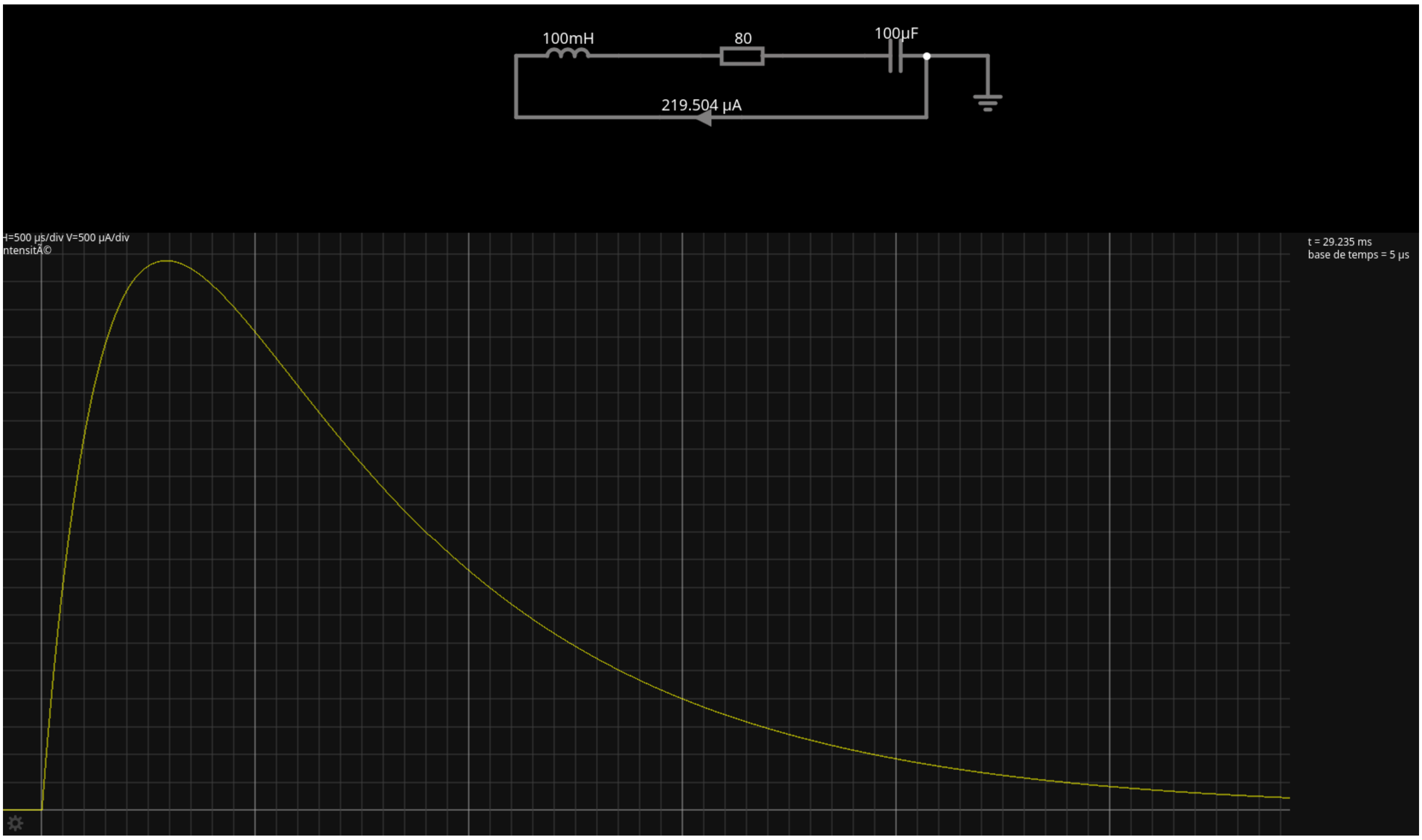
$$= \frac{1}{\beta L} sh(\beta t) e^{\alpha t} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = \frac{-R_s}{2L} \\ \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ R_s = 80 \end{cases}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{\beta L} sh(\beta t) e^{\alpha t}} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = \frac{-R_s}{2L} \\ \beta = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{R_s^2 C - 4L}{C}} \\ R_s = 80 \end{cases}$$

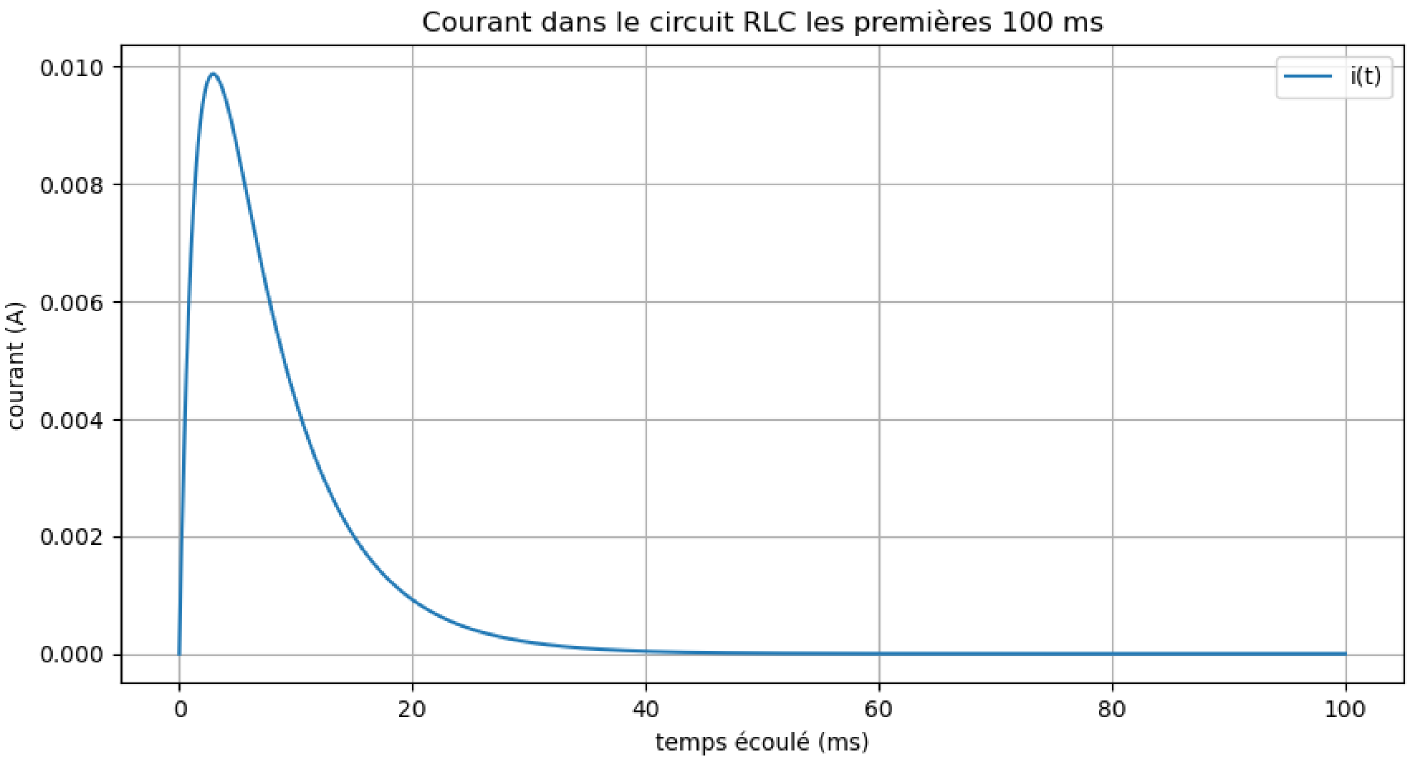
Via le code *Python* suivant, on trace la courbe de l'intensité avec l'expression obtenue précédemment afin de vérifier qu'elle correspond bien à celle obtenue par le simulateur :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# constantes du circuit
L = 0.1  # inductance en H
R_s = 80  # résistance en Ohm
C = 1e-4  # capacité en F

# calcul des racines r_1 et r_2
r_1 = -R_s / (2 * L) - (1 / (2 * L)) * np.sqrt((R_s**2 * C - 4 * L) / C)
r_2 = -R_s / (2 * L) + (1 / (2 * L)) * np.sqrt((R_s**2 * C - 4 * L) / C)

# Temps
t = np.linspace(0, 0.1, 1000)  # Plus de points pour une meilleure résolution

# Courant en fonction du temps
i_t = (1 / ((r_2 - r_1) * L)) * (np.exp(r_2 * t) - np.exp(r_1 * t))

# Tracé du courant
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t * 1000, i_t, label='i(t)')
plt.title('Courant dans le circuit RLC les premières 100 ms')
plt.xlabel('temps écoulé (ms)')
plt.ylabel('courant (A)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Les captures d'écran suivantes montrent que l'expression obtenue précédemment correspond bien à la simulation :



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator ».

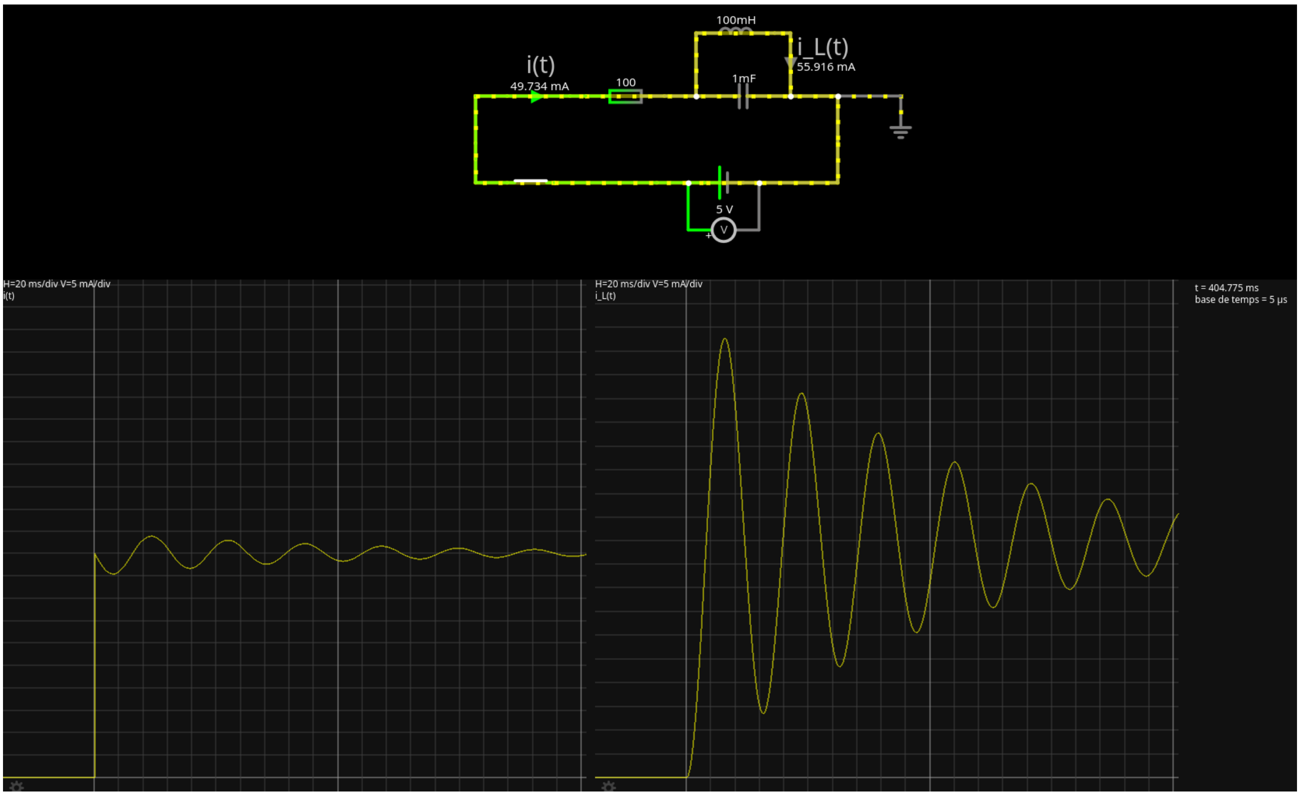


Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.

4 Oscillateur harmonique amorti et forcé : Circuit RLC en parallèle avec générateur délivrant un courant continu (section 7.3.1 du cours)

4.1 Énoncé

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante.



- La bobine est d'inductance $L = 100\ mH$,
- La résistance R est de 100 Ω,
- Le condensateur est de capacité $C = 1\ mF$.
- La tension aux bornes du générateur est constante égale à 5 V.
- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note $i(t)$ le courant qui traverse le générateur et $i_L(t)$ le courant qui traverse la bobine. On souhaite déterminer une expression $i_L(t)$ du courant en ampères qui traverse la bobine.

1) Démontrer que :

$$i_L(0) = 0$$

2) Démontrer que :

$$i_L'(0) = 0$$

3) Démontrer que i_L est solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$RLCy'' + Ly' + Ry = 5$$

4) En déduire une expression de $i_L(t)$ en fonction de R, L, C et t.
5) Vérifier l'expression trouvée en utilisant le simulateur en ligne comme dans l'exercice de la section précédente. Depuis le site du cours à l'url `https://caltuli.online`, on peut récupérer le fichier de configuration de ce circuit via le lien étiqueté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et forcé avec un forçage constant ».

4.2 Correction

1) D'après l'énoncé, on a :

$$u_C(0) = 0 \quad \text{(en notant } u_C(t) \text{ la tension en } V \text{ aux bornes du condensateur à l'instant } t)$$

Donc, comme un condensateur non chargé se comporte comme un court-circuit et que la bobine est montée en parallèle par rapport au condensateur, on a :

$$i_L(0) = 0$$

2) On a :

$$u_L(t) = Li'_L(t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_L(0) &= Li'_L(0) \\ 0 &= Li'_L(0) \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ i'_L(0) &= 0 \quad (\text{car } L \neq 0) \end{aligned}$$

3) On va déterminer deux expressions de $i(t)$ en fonction de $i_L(t)$.
D'après la loi des mailles, on a :

$$\begin{aligned} u_G(t) &= u_R(t) + u_L(t) \quad \text{(en notant } u_G(t) \text{ la tension en } V \text{ aux bornes du générateur (en convention générateur) et } u_R(t) \text{ celle aux bornes de la résistance à l'instant } t) \\ 5 &= Ri(t) + Li'_L(t) \end{aligned}$$

On obtient une première expression de $i(t)$ en fonction de $i_L(t)$:

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{R}\left(5 - Li'_L(t)\right)}$$

D'après la loi des nœuds, on obtient :

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t) \quad \text{(en notant } i_C(t) \text{ l'intensité en } A \text{ qui traverse le condensateur)}$$

Pour obtenir une deuxième expression de $i(t)$ en fonction de $i_L(t)$, on cherche alors d'abord une expression de $i_C(t)$ en fonction de $i_L(t)$.
Pour ce faire, on applique la loi des mailles dans la maille LC :

$$u_C(t) = u_L(t) \quad \text{(en notant } u_L(t) \text{ la tension aux bornes de la bobine à l'instant } t)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Li'_L(t) &= u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(s)\,ds \\ Li''_L(t) &= \frac{1}{C} i_C(t) \end{aligned}$$

On obtient bien ainsi une expression de $i_C(t)$ en fonction de $i_L(t)$:

$$\boxed{i_C(t) = LCi''_L(t)}$$

En remplaçant cette expression de $i_C(t)$ dans l'application de la loi des nœuds, on obtient une deuxième expression de $i(t)$ en fonction de $i_L(t)$:

$$\boxed{i(t) = i_L(t) + LCi''_L(t)}$$

En écrivant l'égalité entre les deux expressions de $i(t)$ en fonction de $i_L(t)$ déterminées précédemment, on obtient une relation différentielle concernant l'intensité du courant dans la bobine :

$$\begin{aligned} i_L(t) + LCi''_L(t) &= \frac{1}{R}\left(5 - Li'_L(t)\right) \\ Ri_L(t) + RLCi''_L(t) &= 5 - Li'_L(t) \\ RLCi''_L(t) + Li'_L(t) + Ri_L(t) &= 5 \end{aligned}$$

En définitive, i_L est bien solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$\boxed{RLCy'' + Ly' + Ry = 5}$$

4) On résout l'équation différentielle obtenue à la question précédente en utilisant la section « Équations différentielles linaires d'ordre 2 à coefficients réels constants » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles ».

- **Première étape : On résout l'équation homogène associée**
  L'équation homogène associée est :

$$RLCy'' + Ly' + Ry = 0$$

Son équation caractéristique est l'équation suivante d'inconnue x :

$$RLCx^2 + Lx + R = 0$$

On calcule son discrimant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= L^2 - 4R^2LC \\ &= \left(10^{-1}\right)^2 - 4\left(10^2\right)^2 10^{-1}10^{-3} \\ &= 10^{-2} - 4 \\ &< 0\end{aligned}$$

Le **discriminant** Δ du trinôme $RLCx^2 + Lx + R$ est **strictement négatif** donc les solutions de l'équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués que l'on calcule maintenant :

$$\begin{aligned}\frac{-L - i\sqrt{-\Delta}}{2RLC} &= -\frac{1}{2RC} - i\frac{1}{2RLC}\sqrt{4R^2LC - L^2} \\ &= -\frac{1}{2RC} - i\sqrt{\frac{4R^2LC - L^2}{4R^2L^2C^2}} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2RC} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{-L + i\sqrt{-\Delta}}{2RLC} = \boxed{-\frac{1}{2RC} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}}$$

On note $\alpha \pm i\omega$ ces deux racines. Autrement dit, on note :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de forme générale :

$$\boxed{y_H(t) = Ae^{\alpha t}\cos\left(\omega t + \phi\right) \qquad \text{avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0; 2\pi[\qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}}$$

- **Deuxième étape : On détermine une solution particulière de l'équation (avec le second membre !)**
  Le second membre de l'équation est :

$$\begin{aligned}5 &= 5.e^{0\times t} \\ &= P(t)\,e^{\lambda t} \quad \text{en notant } P \text{ la fonction polynomiale constante égale à 5 et } \lambda = 0\end{aligned}$$

Comme $\lambda = 0$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors d'après la section « Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients réels constants quand le second membre est de la forme $P(t)\,e^{\lambda t}$ avec $P(t)$ une fonction polynômiale et $\lambda \in \mathbb{C}$ » du document « Exercices avec cours intégré sur les équations différentielles », on cherche une solution particulière y_p sous la forme :

$y_p(t) = Q(t).e^{0\times t}$ avec Q une fonction polynomiale de même degré que $P(t) = 5$, c'est-à-dire une constante qu'on note K

Autrement dit, on cherche tout simplement une solution particulière constante :

$$y_p(t) = K \quad \text{avec } K \text{ une constante réelle}$$

Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } RLCy'' + Ly' + Ry = 5 \text{ d'inconnue } y &\iff RLCy_p'' + Ly_p' + Ry_p = 5 \\
&\iff RLC(K)'' + L(K)' + RK = 5 \\
&\iff RLC \times 0 + L \times 0 + RK = 5 \quad \text{(car la dérivée d'une fonction constante (ici } t \mapsto K\text{) est nulle)} \\
&\iff RK = 5 \\
&\iff K = \frac{5}{R}
\end{aligned}$$

En définitive :

$$\boxed{y_p(t) = \frac{5}{R} \text{ est une solution particulière de l'équation } RLCy'' + Ly' + Ry = 5 \text{ d'inconnue } y.}$$

- **Troisième étape : On écrit l'expression générale des solutions de l'équation (avec second membre!)**
  Les solutions de l'équation (avec le second membre!) sont donc de forme générale :

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{R} + Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[\qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}}$$

Ainsi, comme $i_L(t)$ est une solution de cette équation, on a :

$$\boxed{\text{Il existe } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[\text{ tels que} \qquad i_L(t) = \frac{5}{R} + Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}}$$

Il reste donc à déterminer l'amplitude A et la phase initiale ϕ du terme homogène de cette expression de $i_L(t)$.
Pour ce faire, on a :

$$\begin{cases} i_L(t) = \frac{5}{R} + Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \\ i_L(0) = 0 \\ i_L'(0) = 0 \end{cases}$$

On détermine une expression de $i_L'(t)$:

$$i_L'(t) = \alpha Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) - \omega Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \phi)$$

Donc :

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 \\ i_L'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{R} + Ae^{\alpha \times 0}\cos(\omega \times 0 + \phi) = 0 \\ \alpha Ae^{\alpha \times 0}\cos(\omega \times 0 + \phi) - \omega Ae^{\alpha \times 0}\sin(\omega \times 0 + \phi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{R} + A\cos(\phi) = 0 \\ \alpha A\cos(\phi) - \omega A\sin(\phi) = 0 \end{cases}$$

On déduit $\tan(\phi)$ de la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\alpha A\cos(\phi) - \omega A\sin(\phi) &= 0 \\
\alpha A\cos(\phi) &= \omega A\sin(\phi) \\
\alpha\cos(\phi) &= \omega\sin(\phi) \quad \left(\text{car } A \neq 0 \text{ sinon on aurait } \frac{5}{R} = 0 \text{ avec la première ligne}\right) \\
\frac{\alpha}{\omega} &= \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(\phi) = \frac{\alpha}{\omega}}$$

On sait déjà que $\phi \in [0; 2\pi[$.
On localise ϕ plus précisément en déterminant le signe de son cosinus et le signe de son sinus :

$$\begin{cases} \frac{5}{R} + A\cos(\phi) = 0 \\ \alpha A\cos(\phi) - \omega A\sin(\phi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\phi) = -\frac{5}{AR} < 0 \\ \sin(\phi) = \frac{\alpha}{\omega}\cos(\phi) > 0 \quad (\text{car } \alpha = -\frac{1}{2RC} < 0) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \cos(\phi) < 0 \\ \sin(\phi) > 0 \end{cases}}$$

Donc :

$$\boxed{\phi \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[}$$

On détermine maintenant ϕ en utilisant la fonction arctan.

La fonction arctan est la fonction qui, à un nombre réel x, associe la mesure d'angle θ **qui appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$** telle que $\tan(\theta) = x$.
Donc, par exemple $\arctan(\tan(\phi))$ n'est pas égal à ϕ puisque ϕ n'appartient pas à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Cependant, comme $\phi - \pi$ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a bien :

$$\phi - \pi = \arctan(\tan(\phi - \pi))$$

Et comme tan est π-périodique (i.e. $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$), on a :

$$\begin{aligned} \phi - \pi &= \arctan(\tan(\phi)) \\ \phi &= \pi + \arctan(\tan(\phi)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\phi = \pi + \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)} \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}$$

On en déduit A :

$$\begin{aligned} \frac{5}{R} + A\cos(\phi) &= 0 \\ A &= -\frac{5}{R}\frac{1}{\cos(\phi)} \\ A &= \frac{5}{R}\frac{1}{(-\cos(\phi))} \\ A &= \frac{5}{R}\frac{1}{|\cos(\phi)|} \quad (\text{car } \cos(\phi) < 0) \\ A &= \frac{5}{R}\frac{1}{\sqrt{\cos^2(\phi)}} \quad (\text{car } \sqrt{x^2} = |x| \text{ et non } x) \\ A &= \frac{5}{R}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\phi)}} \\ A &= \frac{5}{R}\sqrt{1 + \tan^2(\phi)} \quad \left(\text{Ne pas oublier que } \tan'(x) = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}\right) \\ A &= \frac{5}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{5}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}}$$

En définitive, on obtient bien une expression de $i_L(t)$ en fonction de R, L, C et t :

$$\boxed{i_L(t) = \frac{5}{R} + \frac{5}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} e^{\alpha t} \cos\left(\omega t + \pi + \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)\right) \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}}$$

Cette expression peut se réécrire sans notation intermédiaire comme suit :

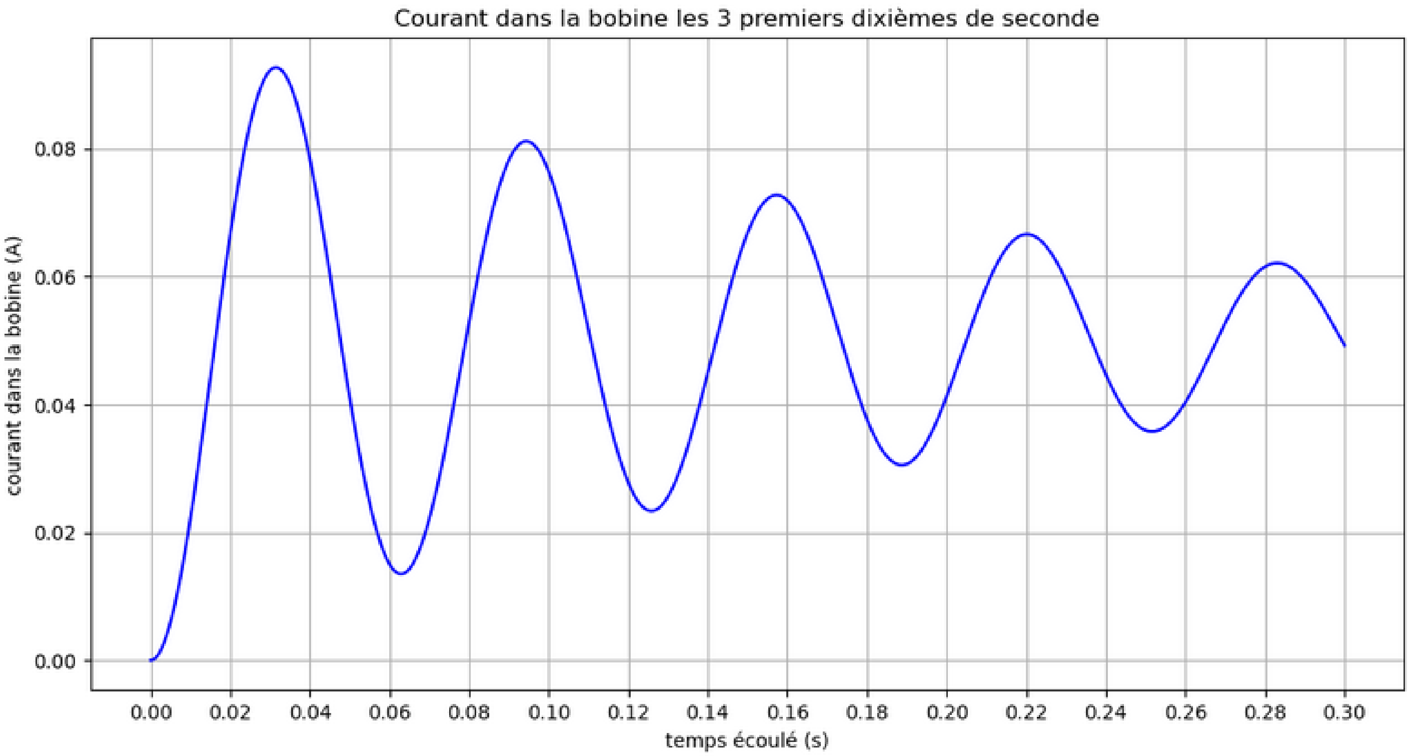
$$\boxed{i_L(t) = \frac{5}{R} + \frac{5}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2RC\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}}\right)^2}\, e^{\frac{-1}{2RC}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \cdot t + \left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{2\omega RC}\right)\right)\right)}$$

Ou bien, ce qui est préférable, avec davantage de notations intermédiaires comme suit :

$$\boxed{i_L(t) = y_p(t) + Ae^{\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{où on a noté} \begin{cases} y_p(t) = \frac{5}{R} \\ \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \\ A = \frac{5}{R}\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \\ \phi = \pi + \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) \end{cases}}$$

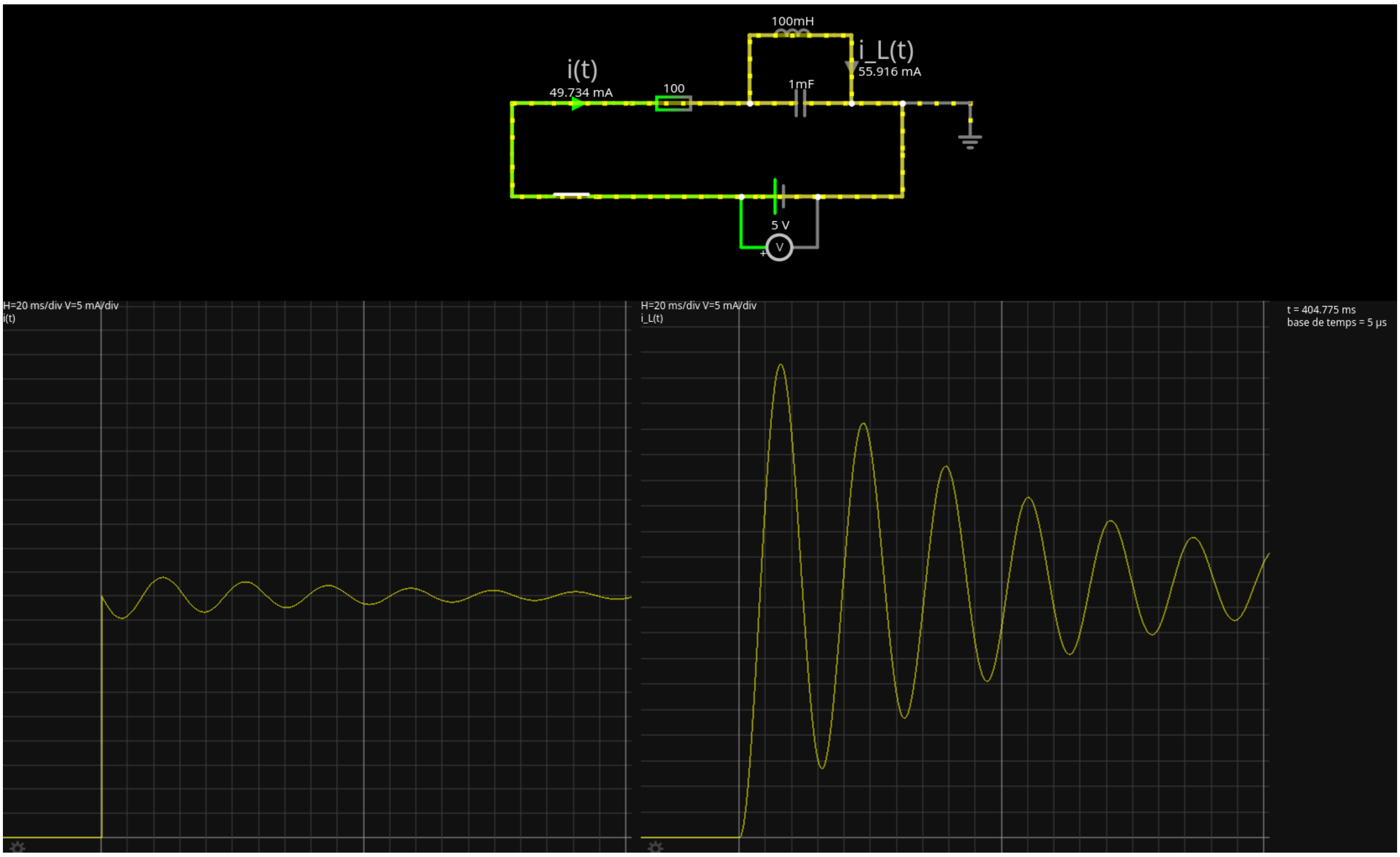
8) Via le code suivant, on trace la courbe de la fonction i_L déterminée précédemment :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes du circuit
R = 100  # résistance en ohms
L = 0.1  # inductance en H
C = 0.001  # capacité en F

# coefficient d'amortissement
alpha = -1 / (2 * R * C)

# pulsation propre
omega = omega = np.sqrt(1 / (L * C) - 1 / (2 * R * C)**2)

# amplitude
A = (5 / R) * np.sqrt(1 + (1 / (2 * omega * R * C))**2)

# phase initiale
phi = np.pi - np.arctan(1 / (2 * omega * R * C))

# temps
t = np.linspace(0, 0.3, 1500)

# solution particulière constante
yp = 5 / R

# courant en A en fonction du temps
i_L = yp + A * np.exp(alpha * t) * np.cos(omega * t + phi)

# Plotting
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t, i_L, 'b-')  # blue line
plt.title('Courant dans la bobine les 3 premiers dixièmes de seconde')
plt.xlabel('temps écoulé (s)')
plt.ylabel("courant dans la bobine (A)")
plt.xticks(np.arange(0, 0.31, 0.02))
plt.grid(True)
plt.show()
```



Courbe de l'intensité du courant traversant la bobine obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.

On obtient bien la même courbe que celle tracée par le simulateur en ligne :

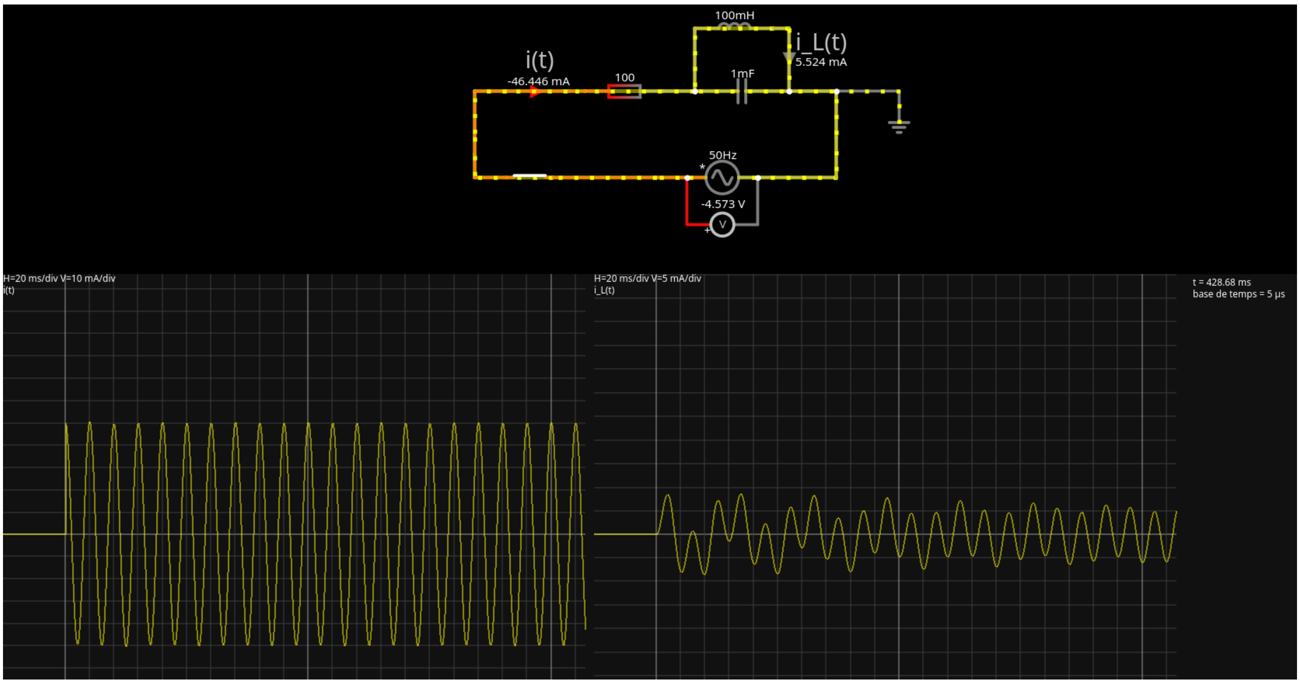


Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator ».

5 Oscillateur harmonique amorti et forcé : Circuit RLC en parallèle avec générateur délivrant un courant alternatif (section 7.3.2 du cours)

5.1 Énoncé

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante.



- La bobine est d'inductance $L = 100\ mH$,
- La résistance R est de $100\ \Omega$,
- Le condensateur est de capacité $C = 1\ mF$.
- La tension en Volts aux bornes du générateur à l'instant t est donnée par l'expression suivante :

$$g(t) = 5\cos(100\pi t)$$

- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note $i(t)$ le courant qui traverse le générateur et $i_L(t)$ le courant qui traverse la bobine. On souhaite déterminer une expression $i_L(t)$ du courant en ampères qui traverse la bobine.

1) Déterminer une expression de $i_L(t)$ en fonction de R, L, C et t.
2) Vérifier l'expression trouvée en utilisant le simulateur en ligne comme dans l'exercice de la section précédente.
Depuis le site du cours à l'url `https://caltuli.online`, on peut récupérer le fichier de configuration de ce circuit via le lien étiquetté « fichier de configuration d'un oscillateur amorti et forcé avec un forçage cosinusoïdal ».

5.2 Correction

1) Comme dans l'exercice de la section « Avec un forçage constant : Avec un générateur délivrant un courant continu », on obtient que i_L est une solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y :

$$RLCy''(t) + Ly'(t) + Ry(t) = g(t) \qquad \text{où } g(t) \text{ est l'intensité en } A \text{ du courant délivré par le générateur}$$

Comme on a

$$\begin{cases} R = 100 \\ L = 0,1 \\ C = 0,001 \\ g(t) = 5\cos(100\pi t) \end{cases}$$

l'équation précédente est équivalente aux suivantes :

$$RLCy''(t) + Ly'(t) + Ry(t) = g(t)$$
$$0,01y''(t) + 0,1y'(t) + 100y(t) = g(t) = 5\cos(100\pi t)$$

$$y''(t) + 10y'(t) + 10^4 y(t) = g(t) = 500\cos(100\pi t)$$

$$\boxed{y''(t) + 10y'(t) + 10^4 y(t) = 500\cos(100\pi t)}$$

Comme cette équation a le même membre de gauche que celle de l'exercice de la section « Avec un forçage constant : Avec un générateur délivrant un courant continu », les solutions de l'équation homogène associée sont encore de forme générale suivante :

$$y_H(t) = Ae^{\alpha t}\cos\big(\omega t + \phi\big) \qquad \text{avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[\qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2RC} \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{cases}$$

Avec l'application numérique précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2RC} \\ &= -\frac{1}{2\times 10^2 \times 10^{-3}} \\ &= -\frac{10}{2} \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = -5}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10^{-1}\times 10^{-3}} - \left(\frac{1}{2\times 10^2 \times 10^{-3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{10\,000 - 25} \\ &= \sqrt{9\,975} \\ &= \sqrt{25 \times 399} \\ &= 5\sqrt{399} \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = 5\sqrt{399}}$$

Ainsi, les solutions de l'équation homogène admettent la forme générale suivante :

$$\boxed{y_H(t) = Ae^{-5t}\cos\Big(5\sqrt{399}\,.\,t + \phi\Big) \qquad \text{avec } A \geq 0 \text{ et } \phi \in [0;2\pi[}$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation $y''(t)+10y'(t)+10^4 y(t) = 500\cos(100\pi t)$ de la forme suivante :

$$y_p(t) = C_1\cos(100\pi t) + C_2\sin(100\pi t) \qquad \text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ deux constantes réelles}$$

En effet, on peut trouver une solution particulière de cette forme car :

- Le membre de droite est $500\cos(100\pi t) = \mathscr{R}e\big(500e^{100\pi i t}\big)$.
- $100\pi i$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique $x^2 + 10x + 10^4 = 0$.
- $C_1\cos(100\pi t) + C_2\sin(100\pi t) = \mathscr{R}e\left((C_1 - iC_2)(\cos(100\pi t) + i\sin(100\pi t))\right) = \mathscr{R}e\big((C_1 - iC_2)\,e^{100\pi i t}\big)$

Il s'agit donc de déterminer deux réels C_1 et C_2 tels que y_p est solution de l'équation.
On détermine d'abord une expression de $y_p'(t)$ et de $y_p''(t)$:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= C_1\cos(100\pi t) + C_2\sin(100\pi t) \\ y_p'(t) &= -10^2\pi C_1\sin(100\pi t) + 10^2\pi C_2\cos(100\pi t) \\ y_p''(t) &= -10^4\pi^2 C_1\cos(100\pi t) - 10^4\pi^2 C_2\sin(100\pi t) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de l'équation} &\iff y_p''(t) + 10y_p'(t) + 10^4 y_p(t) = 500\cos(100\pi t) \\ &\iff \big(-10^4\pi^2 C_1\cos(100\pi t) - 10^4\pi^2 C_2\sin(100\pi t)\big) \\ &\qquad + 10\big(-10^2\pi C_1\sin(100\pi t) + 10^2\pi C_2\cos(100\pi t)\big) \\ &\qquad + 10^4\left(C_1\cos(100\pi t) + C_2\sin(100\pi t)\right) \\ &\quad = 500\cos(100\pi t) \\ &\iff \big(-10^4\pi^2 C_1 + 10^3\pi C_2 + 10^4 C_1\big)\cos(100\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\left(-10^4\pi^2 C_2 - 10^3\pi C_1 + 10^4 C_2\right)\sin(100\pi t)\\
&= 500\cos(100\pi t)\\
\iff &\begin{cases} -10^4\pi^2 C_1 + 10^3\pi C_2 + 10^4 C_1 = 500 \\ -10^4\pi^2 C_2 - 10^3\pi C_1 + 10^4 C_2 = 0 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} -10^3\pi C_1 + 10^4\left(1-\pi^2\right) C_2 = 0 \\ 10^4\left(1-\pi^2\right) C_1 + 10^3\pi C_2 = 500 \end{cases} \qquad \text{On va appliquer la méthode du pivot de Gauss.}\\
\iff &\begin{cases} -10^3\pi C_1 + 10^4\left(1-\pi^2\right) C_2 = 0 \\ \left(10^3\pi^2 + 10^5\left(1-\pi^2\right)^2\right) C_2 = 500\pi \end{cases} \qquad \text{via } L_2 \leftarrow \pi L_2 + 10\left(1-\pi^2\right) L_1\\
\iff &\begin{cases} -10^3\pi C_1 + 10^4\left(1-\pi^2\right) C_2 = 0 \\ C_2 = \frac{500\pi}{10^3\pi^2 + 10^5\left(1-\pi^2\right)^2} \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} -10^3\pi C_1 + 10^4\left(1-\pi^2\right) C_2 = 0 \\ C_2 = \frac{5\pi}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} C_1 = \frac{10^4\left(1-\pi^2\right) C_2}{10^3\pi} \\ C_2 = \frac{5\pi}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} C_1 = \frac{10^4\left(1-\pi^2\right)}{10^3\pi}\frac{5\pi}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \\ C_2 = \frac{5\pi}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} C_1 = 10\left(1-\pi^2\right)\frac{5}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \\ C_2 = \frac{5\pi}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2} \end{cases}\\
\iff &y_p(t) = \frac{5}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2}\left(10\left(1-\pi^2\right)\cos(100\pi t) + \pi\sin(100\pi t)\right)
\end{aligned}$$

La fonction y_p suivante est donc une solution particulière de l'équation :

$$\boxed{y_p(t) = \frac{5}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2}\left(10\left(1-\pi^2\right)\cos(100\pi t) + \pi\sin(100\pi t)\right)}$$

Donc il existe $A \in \mathbb{R}^+$ et $\phi \in [0;2\pi[$ tels que :

$$i_L(t) = Ae^{-5t}\cos\left(\omega t + \phi\right) + y_p(t) \qquad \text{où on a noté } \begin{cases} \omega = 5\sqrt{399} \\ y_p(t) = \frac{5}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2}\left(10\left(1-\pi^2\right)\cos(100\pi t) + \pi\sin(100\pi t)\right) \end{cases}$$

Pour achever la détermination de i_L, il s'agit donc de déterminer $A \in \mathbb{R}^+$ et $\phi \in [0;2\pi[$.
Pour ce faire, on procède comme d'habitude en déterminant une expression de $i_L'(t)$ puis on exploite les conditions initiales qui sont les mêmes que celles de l'exercice de la section « Avec un forçage constant : Avec un générateur délivrant un courant continu » :

$$i_L'(t) = -5Ae^{-5t}\cos\left(\omega t + \phi\right) - A\omega e^{-5t}\sin\left(\omega t + \phi\right) + \frac{5}{10\pi^2 + 10^3\left(1-\pi^2\right)^2}\left(-10^3\pi\left(1-\pi^2\right)\sin(100\pi t) + 10^2\pi^2\cos(100\pi t)\right)$$

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 \\ i_L'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos(\phi) + \frac{5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} = 0 \\ -5A\cos(\phi) - A\omega\sin(\phi) + \frac{50\pi^2}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos(\phi) = -\frac{5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} \\ -5A\cos(\phi) - A\omega\sin(\phi) + \frac{50\pi^2}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos(\phi) = -\frac{5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} \\ \frac{25\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} - A\omega\sin(\phi) + \frac{50\pi^2}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2 + \pi^2} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A\cos\left(\phi\right) = -\frac{5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2} \\ A\sin\left(\phi\right) = \frac{25}{\omega}\frac{1+\pi^2}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2} \end{array}\right.$$

$$\tan\left(\phi\right) = \frac{1}{\sqrt{399}}\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}$$

Comme $\cos\left(\phi\right) > 0$ et $\sin\left(\phi\right) > 0$, on a $\phi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et donc :

$$\boxed{\phi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{399}}\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right)}$$

Et la détermination de A en découle :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\frac{1}{\cos\left(\phi\right)} \\ &= \frac{-5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\phi\right)}} \quad \text{(car } \cos\left(\phi\right) > 0 \\ &= \frac{-5\left(1-\pi^2\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\sqrt{1+\tan^2\left(\phi\right)} \\ &= \frac{5\left(\pi^2-1\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\sqrt{1+\frac{1}{399}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{5\left(\pi^2-1\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\sqrt{1+\frac{1}{399}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right)^2}}$$

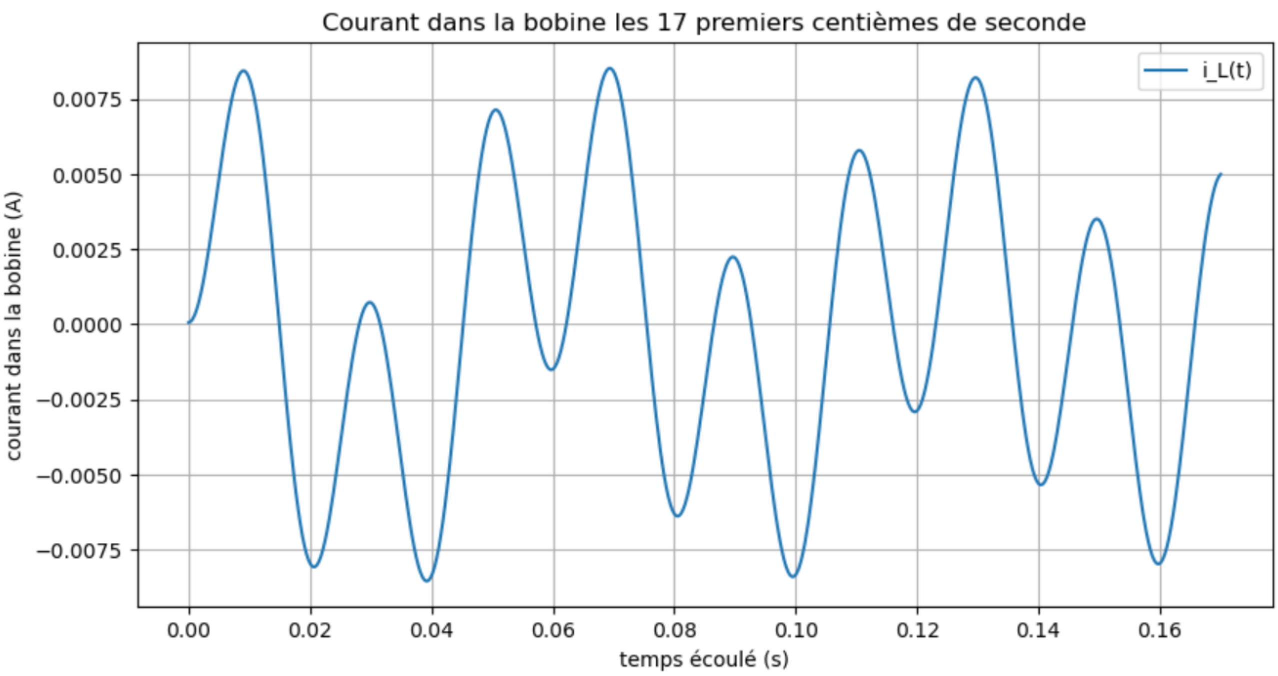
En définitive :

$$\boxed{i_L\left(t\right) = Ae^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\phi\right)+y_p\left(t\right) \qquad \text{où on a noté} \left\{\begin{array}{l} A = \frac{5\left(\pi^2-1\right)}{10^2\left(1-\pi^2\right)^2+\pi^2}\sqrt{1+\frac{1}{399}\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right)^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{399}}\frac{\pi^2+1}{\pi^2-1}\right) \\ \alpha = -5 \\ \omega = 5\sqrt{399} \\ y_p\left(t\right) = \frac{5}{10\pi^2+10^3\left(1-\pi^2\right)^2}\left(10\left(1-\pi^2\right)\cos\left(100\pi t\right)+\pi\sin\left(100\pi t\right)\right) \end{array}\right.}$$

2) On utilise le code *Python* suivant pour tracer la courbe de i_L :

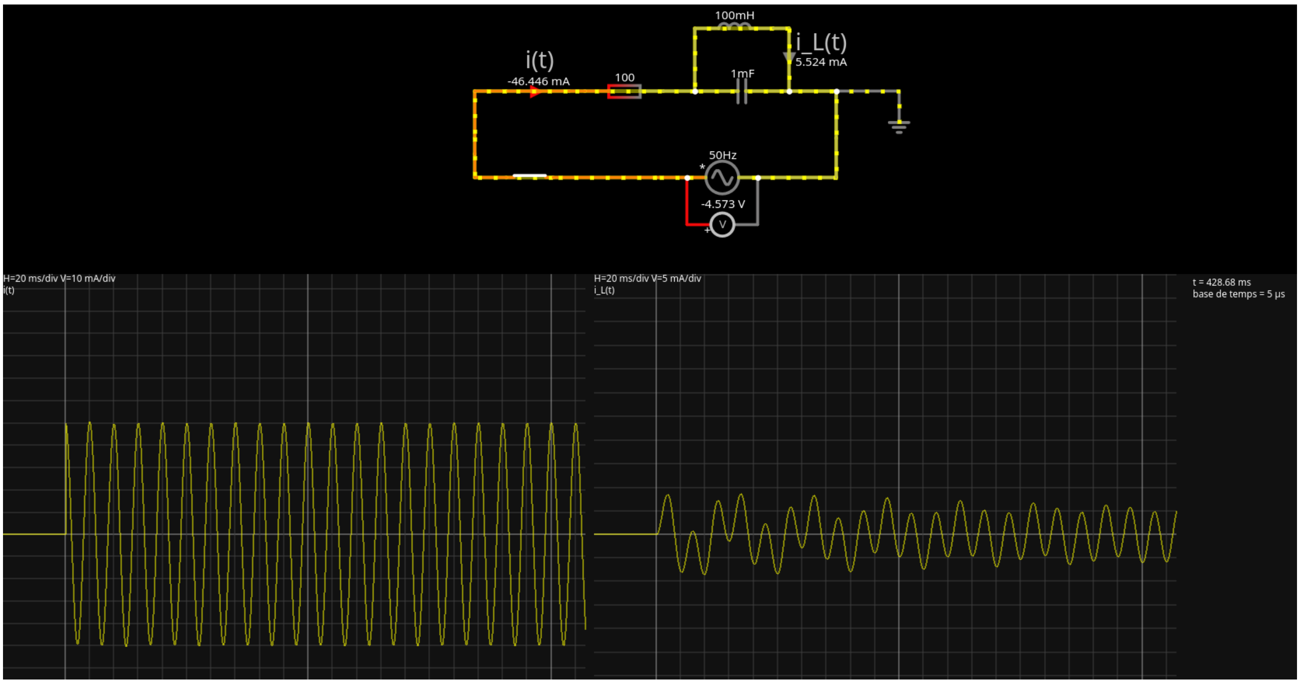
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

pi = np.pi

# Constantes du circuit
R = 100  # résistance en ohms
L = 0.1  # inductance en H
C = 0.001  # capacité en F

# coefficient d'amortissement
alpha = -5

# pulsation propre
omega = 5 * np.sqrt(399)
```

```
# amplitude
A = ((5 * (pi**2 - 1)) / ((10**2 * (1 - pi**2)**2 + pi**2))) * np.sqrt(
    1 + (1 / 399) * ((pi**2+1) / (pi**2-1))**2)

# phase initiale
phi =np.arctan(
    (1 / np.sqrt(399)) * ((pi**2+1) / (pi**2-1)))

# temps
t = np.linspace(0, 0.17, num=500)

# solution particulière
denom = 1000 * (1 - pi**2)**2 + 100 * pi**2
yp = (5 / denom) * (
    10 * (1 - pi**2) * np.cos(100 * pi * t)
    + pi * np.sin(100 * pi * t))

# courant en A en fonction du temps
i_L = A * np.exp(-5 * t) * np.cos(omega * t + phi) + yp

# tracer
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, i_L, label='i_L(t)')
plt.title('Courant dans la bobine les 17 premiers centièmes de seconde')
plt.xlabel('temps écoulé (s)')
plt.ylabel('courant dans la bobine (A)')
plt.xticks(np.arange(0, 0.18, 0.02))
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.

Il s'agit bien de la même courbe que celle obtenue avec le simulateur en ligne :



Courbe de l'intensité obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator »
.