

# SUJET TYPE TOMIC RÉDACTIONNEL SUR LES OSCILLATEURS HARMONIQUES (intégrant un TP de traitement de données)

Comme le taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère est la principale cause du réchauffement climatique, on souhaite **modéliser son évolution en fonction du temps par une fonction**  $m$  afin de réaliser des constats, des prédictions et de proposer des conduites à tenir en rapport avec le phénomène du réchauffement climatique et la limite planétaire correspondante (cf article « [Les 9 limites planétaires](https://agence-lucie.com/limites-planetaires) » sur [agence-lucie.com](https://agence-lucie.com) à l'url <https://agence-lucie.com/limites-planetaires>).

Dans l'article « [Qu'est-ce qu'un forçage climatique?](#) » de David Saint-Martin et Olivier Boucher, on **distingue** deux types de facteurs qui influencent ce taux :

- Le **forçage naturel** : Soleil, volcanisme,...
- Le **forçage anthropique** : activités humaines, gaz à effet de serre notamment

On souhaiterait alors **distinguer** clairement dans cette **modélisation** d'une part la **réponse au forçage naturel** que ce taux aurait s'il n'était soumis qu'au **forçage naturel** et, d'autre part, la **réponse au forçage anthropique** qu'il aurait s'il n'était soumis qu'au **forçage anthropique**. Pour ce faire, on décide de rechercher  $m$  sous la forme de la **superposition de la réponse au forçage naturel et de la réponse au forçage anthropique**, c'est-à-dire la **somme** suivante :

$$m(t) = s(t) + f(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} s(t) \text{ modélise la réponse au forçage naturel} \\ f(t) \text{ modélise la réponse au forçage anthropique} \end{cases}$$

Le **forçage naturel** n'étant dû principalement qu'à des phénomènes oscillatoires, périodiques et d'amplitude « constante », il est naturel de le représenter par une **équation différentielle d'oscillateur harmonique libre simple** dont l'unique caractéristique est alors sa pulsation propre  $\omega$  (appelée aussi fréquence angulaire) :

$$\text{L'équation } y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \text{ modélise le forçage naturel.}$$

La **réponse au forçage naturel** est alors modélisée par une fonction cosinusoidale de même pulsation propre dont on note  $A$  son amplitude et  $\phi$  sa phase initiale :

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \text{ modélise le réponse au forçage naturel.}$$

En l'absence du **forçage anthropique**, la **réponse au forçage anthropique**  $f(t)$  serait évidemment nulle. Il est donc naturel de le modéliser par le second membre d'une équation différentielle dont l'équation homogène associée est celle qui modélise le **forçage naturel**.

$$\text{L'équation } y'' + \omega^2 \cdot y = g(t) \text{ modélise la loi qui régit l'évolution du taux de } CO_2 \text{ dans l'atmosphère.}$$

$$g(t) \text{ modélise le forçage anthropique.}$$

$g(t)$  pourrait être un polynôme, une série de fonctions step ou toute autre forme fonctionnelle adaptée qui reflète les changements historiques et prévus des émissions de  $CO_2$  dues aux activités humaines.

Cette structure de modélisation permet non seulement de simuler la réaction du taux de  $CO_2$  aux influences humaines mais aussi d'étudier l'impact potentiel des politiques de réduction des émissions sur le climat futur en modélisant cet impact par une modification du second membre de cette équation différentielle (ie une modification du forçage anthropique).

La solution de cette équation,  $m(t) = s(t) + f(t)$ , où la **réponse au forçage naturel**  $s(t)$  est une solution de l'équation homogène et où la **réponse au forçage anthropique**  $f(t)$  est une solution particulière de l'équation non homogène, nous permet ainsi de décomposer et d'analyser séparément les effets des forces naturelles et humaines sur le climat. Cette structure de modélisation constitue ainsi un cadre pour comprendre et prévoir les variations du taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère avec une précision qui distingue l'influence des rythmes naturels des impacts humains, afin de déterminer les efforts de mitigation du changement climatique.

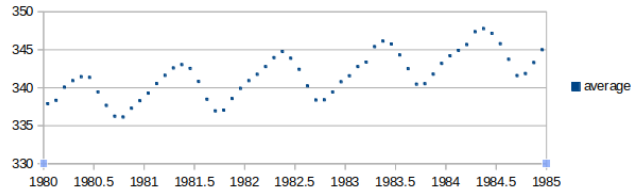
- Récupérer le fichier de données au format CSV (Comma-separated values) des mesures mensuelles de CO<sub>2</sub> à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « Global Monitoring Laboratory » via l'url [https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2\\_mm\\_mlo.csv](https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.csv).

Comme le nom de son format l'indique, un tel fichier stocke des valeurs en les séparant par des virgules. Les logiciels comme *Excel* et *LibreOffice Calc* sont en particulier conçus pour reconnaître ce format et générer automatiquement une feuille de calcul structurant l'information des données contenues.

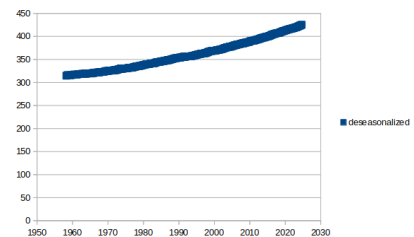
Utiliser l'un de ces logiciels pour générer une telle feuille de calcul prête à l'analyse de ces mesures de taux de CO<sub>2</sub>.

- Via cette feuille de calcul, tracer le nuage des points représentant les mesures du taux de CO<sub>2</sub>, avec la date des mesures en abscisse et le taux de CO<sub>2</sub> en micromole par mole d'air sec en ordonnée. Changer ensuite le cadrage pour faire apparaître les mesures effectuées de 1980 à 2023.

⚠ S'assurer de bien formater les dates sur l'axe des abscisses. En effet, dans le fichier CSV, les nombres sont écrits avec un point et non avec une virgule. Peut-être faut-il le faire lors de la génération du fichier.

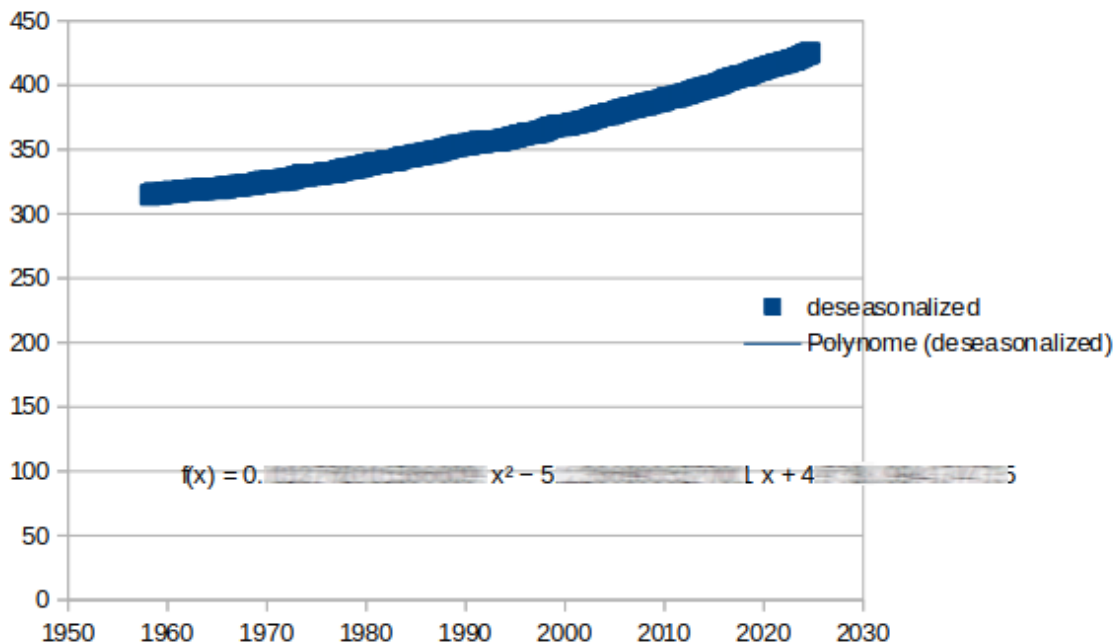
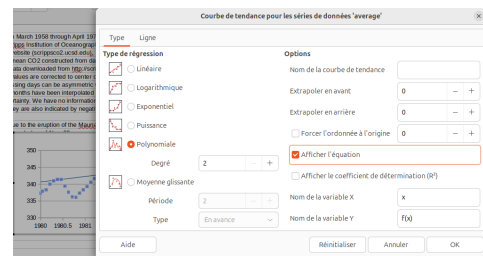


- Via cette feuille de calcul, en utilisant le champ "deseasonalized", tracer maintenant le nuage de points représentant la réponse au forçage anthropique.



- Ajouter au graphique relatif à la réponse au forçage anthropique la courbe de tendance correspondant à la fonction polynomiale de degré 2 modélisant cette réponse au forçage anthropique. Ne pas oublier de choisir l'option d'afficher une expression de cette dernière fonction qui constitue alors le terme polynomial de la modélisation recherchée.

Une expression de cette fonction devrait apparaître comme dans la capture d'écran ci-dessous (sans le floutage).



- En notant  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  les points du nuage relatif aux mesures de la réponse au forçage anthropique et  $f$  la fonction polynomiale de degré 2 modélisant cette réponse (déterminée à la question précédente), on appelle erreur relative globale de  $f$  relativement à ce nuage le nombre  $\mathcal{E}$  suivant :

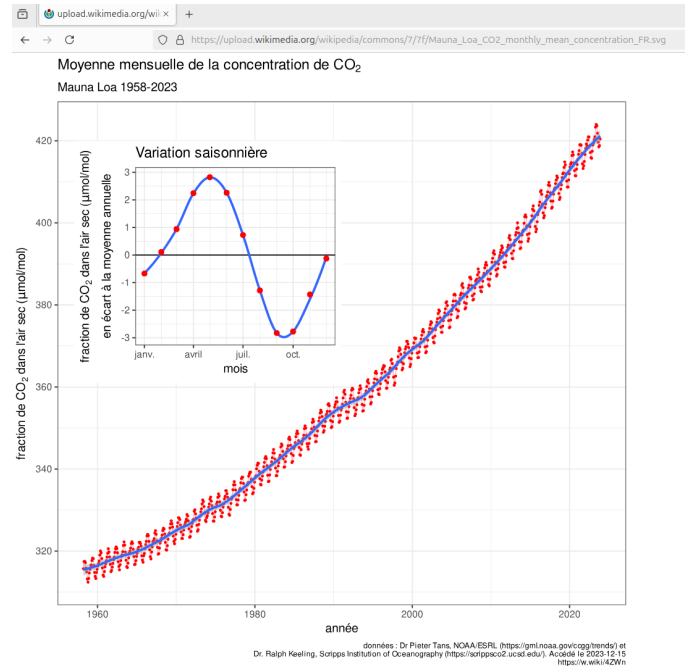
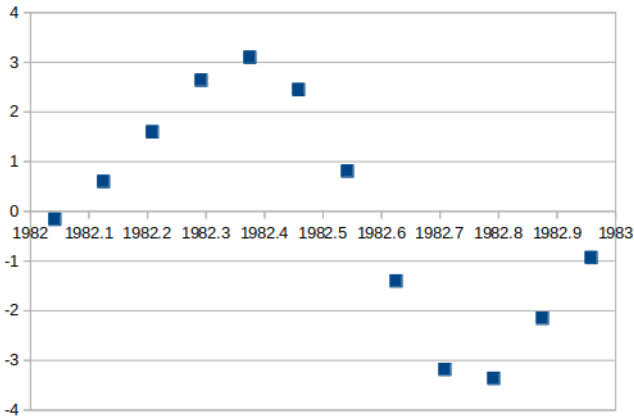
$$\mathcal{E} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i - f(x_i)}{|y_i|}$$

Via *Excel* ou *LibreOffice Calc*, calculer l'erreur relative globale  $\mathcal{E}$  et interpréter le résultat obtenu.

6. Via cette feuille de calcul, tracer maintenant le nuage de points correspondant à la réponse au forçage naturel durant l'année 1982.

Ci-contre, on trouve la **courbe de Keeling** illustrant la concentration mensuelle moyenne de  $CO_2$  mesurée à l'Observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de  $CO_2$  dans l'atmosphère terrestre depuis 1958.

Sur ce même graphique, on trouve aussi la représentation du taux de  $CO_2$  en écart avec la moyenne annuelle. On peut donc le comparer avec le graphique obtenu via *Excel* ou *LibreOffice Calc* qui doit ressembler à la figure ci-dessous.



Courbe de Keeling illustrant la concentration mensuelle moyenne de  $CO_2$  mesurée à l'observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de  $CO_2$  dans l'atmosphère terrestre depuis 1958. Source : [Wikipedia](#).

7. On a précédemment déterminé une approximation  $f$  de la réponse au forçage anthropique. Pour obtenir une approximation de l'évolution du taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère, il ne reste donc qu'à déterminer une approximation  $s$  de la réponse au forçage naturel. Cependant, les logiciels comme *Excel* et *LibreOffice Calc* ne permettent pas d'approximer un nuage de points avec une fonction cosinoïdale.

En vu d'obtenir une telle approximation, on utilise le module *Pandas* de *Python* car il propose des outils permettant d'exploiter un fichier au format *CSV*.

Copier le fichier `co2_mm_mlo.csv` dans un sous-répertoire (du répertoire courant) nommé `data` puis utiliser le code *Python* ci-contre pour récupérer toutes les données de ce fichier dans une variable `df` puis pour afficher toutes ses données.

```
import pandas as pd

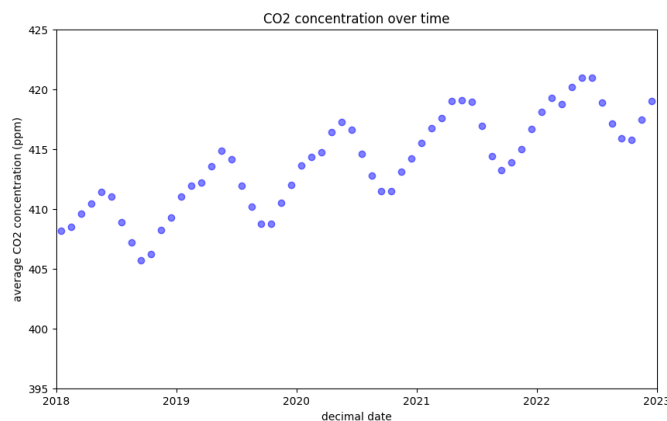
# Charger le fichier en indiquant ',' pour le séparateur
# et '#' pour les lignes de commentaire
df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')

# Configurer pandas pour afficher toutes les lignes
pd.set_option('display.max_rows', None)

# Afficher le DataFrame
print(df)
```

	year	month	decimal date	average	deseasonalized	ndays	sdev	unc
0	1958	3	1958.2027	315.71	314.44	-1	-9.99	-0.99
1	1958	4	1958.2877	317.45	315.16	-1	-9.99	-0.99
2	1958	5	1958.3699	317.51	314.69	-1	-9.99	-0.99
3	1958	6	1958.4548	317.27	315.15	-1	-9.99	-0.99
4	1958	7	1958.5370	315.87	315.20	-1	-9.99	-0.99
5	1958	8	1958.6219	314.93	316.21	-1	-9.99	-0.99
6	1958	9	1958.7068	313.21	316.11	-1	-9.99	-0.99

8. On trouve ci-contre un autre exemple d'utilisation du module *Pandas* pour tracer ci-dessous le nuage de points relatif aux mesures de taux de  $CO_2$  effectuées à l'Observatoire de Mauna Loa :



```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

df = pd.read_csv(
    'data/co2_mm_mlo.csv',
    sep=',',
    comment='#')

# Tracer le nuage de points
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(
    df['decimal date'],
    df['average'],
    color='blue',
    alpha=0.5)

plt.xlabel('decimal date')
plt.ylabel('average CO2 concentration (ppm)')
plt.title('CO2 concentration over time')
plt.xlim(2018, 2023)
plt.ylim(395, 425)
plt.show()
```

S'inspirer de ce code pour tracer avec le module *Pandas* les deux derniers nuages de points tracés précédemment avec *Excel* ou *LibreOffice Calc*.

9. Que fait précisément le code *Python* ci-contre?

Pourquoi?

Exécuter ce code.

Par une lecture graphique, estimer les caractéristiques d'une fonction cosinusoidale qui pourrait modéliser la réponse au forçage naturel, ie :

- amplitude
- pulsation propre
- phase initiale

Calculer l'erreur relative globale de cette approximation relativement à ce nuage de points et interpréter le résultat obtenu.

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

df = pd.read_csv('data/co2_mm_mlo.csv', sep=',', comment='#')
df['average_minus_deseasonalized'] = df['average'] - df['deseasonalized']
monthly_means = df.groupby(df['month'])['average_minus_deseasonalized'].mean()
x_ticks = (np.arange(1, 13) - 0.5) / 12
x_labels = ['jan', 'fév', 'mar', 'avr', 'mai', 'juin', 'juil', 'août', 'sep', 'oct', 'nov', 'déc']

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(x_ticks, monthly_means, color='orange', alpha=0.7)
plt.xticks(x_ticks, x_labels)
plt.xlim(0, 1)
plt.grid(which='major', linestyle='-', linewidth=0.75)
plt.minorticks_on()
plt.grid(which='minor', linestyle='-', linewidth=0.5)
plt.gca().xaxis.set_minor_locator(plt.MultipleLocator(0.1))
ax = plt.gca()
ax.xaxis.grid(True, which='minor', color='red', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.xlabel('mois')
plt.ylabel('taux de CO2 (ppm)')
plt.title('Réponse au forçage naturel')
plt.show()
```

10. Modifier ce code de façon à obtenir une approximation par une fonction cosinusoidale *s* du forçage naturel.

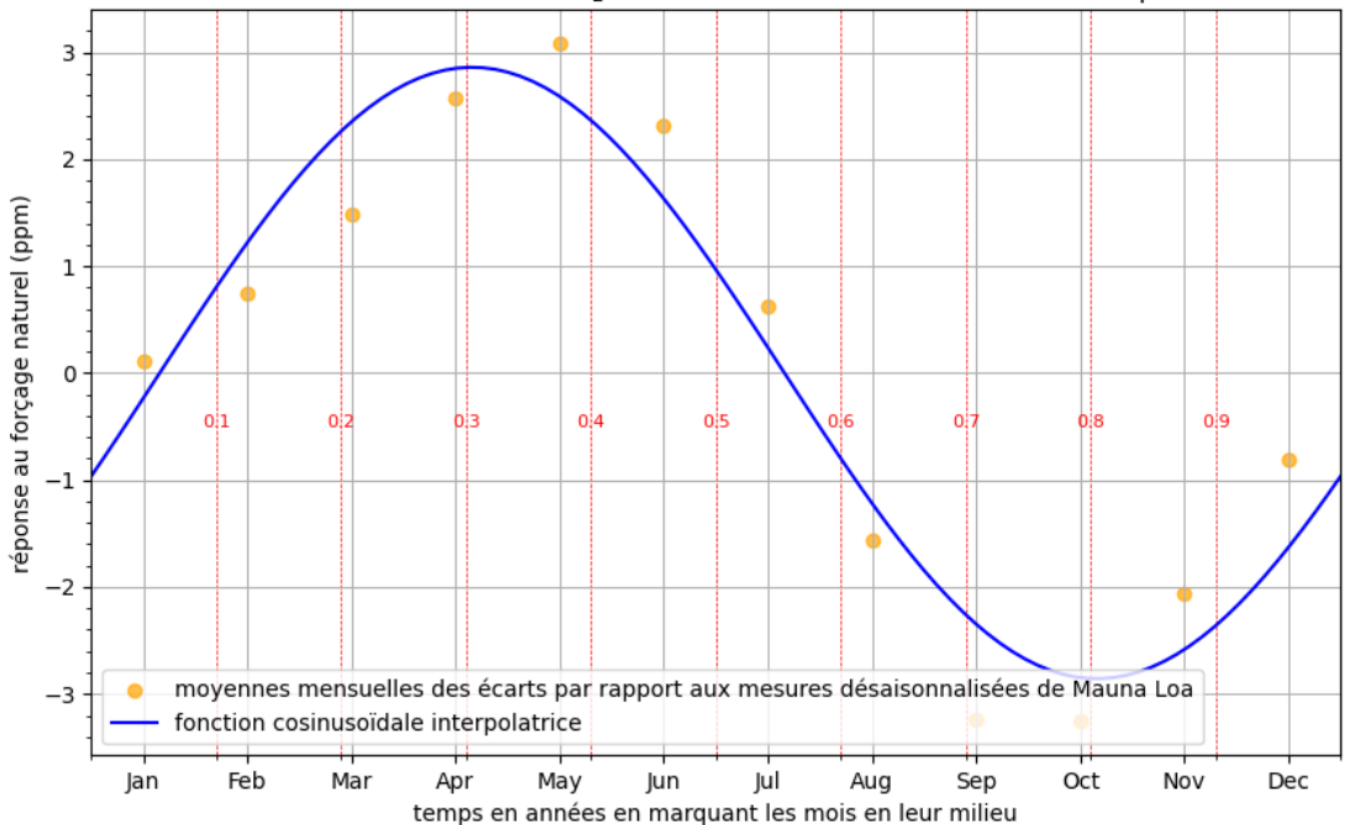
**Indication :** Pour ce faire, utiliser la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python*.

Consulter la [page de documentation concernant la fonction `curve\_fit` du module `scipy.optimize` de \*Python\* sur la documentation officielle en ligne du module \*Scipy\* à l'url \[https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\\\_fit.html\]\(https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\_fit.html\).](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html)

Calculer l'erreur relative globale de cette approximation relativement à ce nuage de points et interpréter le résultat obtenu.

L'expression ajustée de la fonction cosinusoidale est :  $f(x) = \text{amplitude} * \cos(\text{pulsation} * x + \text{phase}) + 0.00$

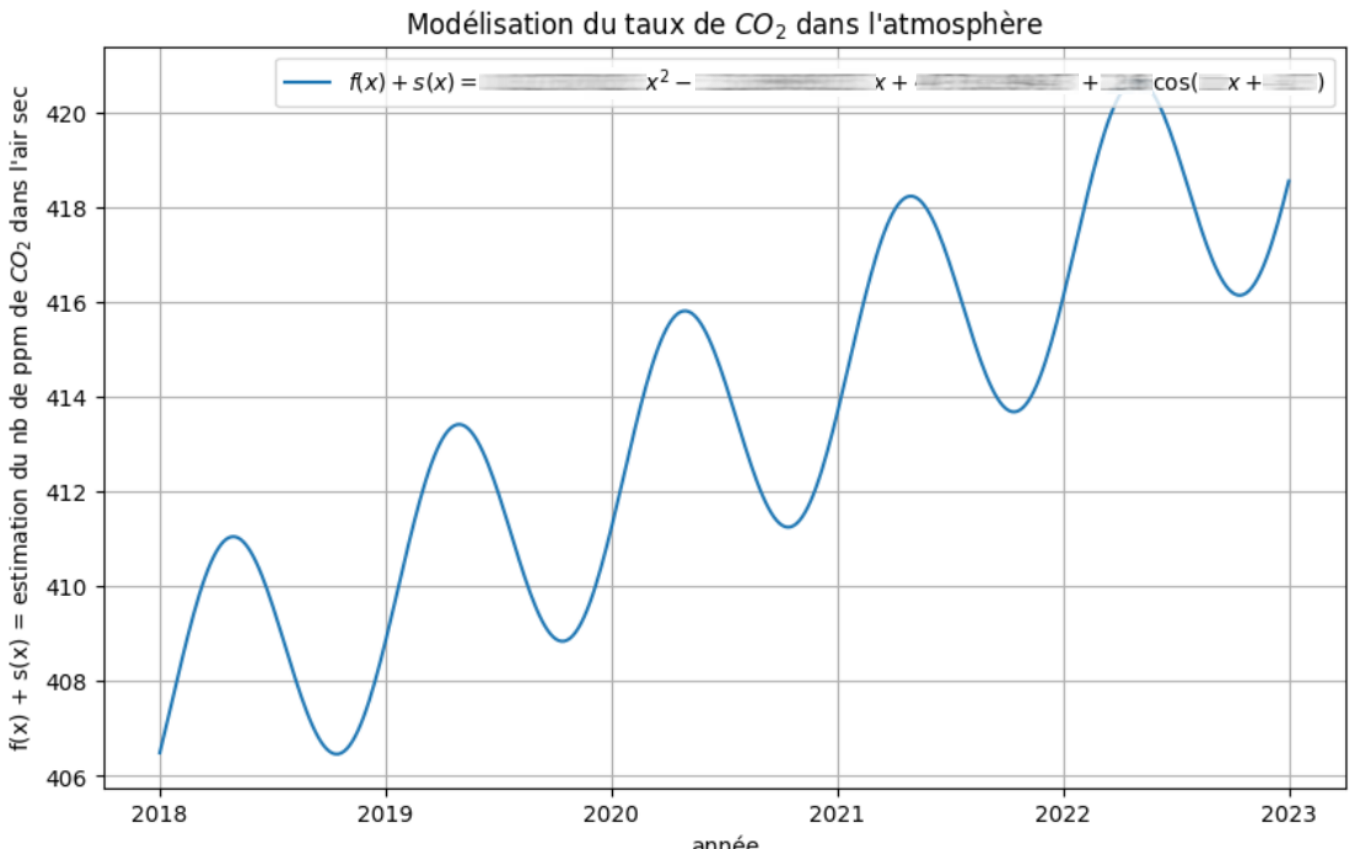
Interpolation par une fonction cosinusoidale des moyennes mensuelles des écarts entre les mesures du taux de CO<sub>2</sub> et les mesures désaisonnalisées correspondantes



11. Déterminer l'amplitude, la pulsation propre, la fréquence et la phase initiale de la fonction cosinusoidale déterminé via *Python* à la question précédente.

12. En déduire l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants qui modélise le forçage naturel.

13. Via Python, tracer pour les années de 2018 à 2023 la modélisation de l'évolution du taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère que l'on a obtenue précédemment.



14. Déterminer l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont la modélisation de l'évolution du taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère est solution.
15. En déduire une modélisation  $g$  du forçage anthropique.
16. Dans l'article « [Les 9 limites planétaires](https://agence-lucie.com/limites-planetaire) » sur [agence-lucie.com](https://agence-lucie.com) à l'url <https://agence-lucie.com/limites-planetaire>, on lit :

*« Le changement climatique est sans doute la limite planétaire la plus connue du grand public.*

*Médiatisé dès les années 70 par le rapport du Club du Rome, le changement climatique est déjà une réalité. Les différents rapports du GIEC (groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) font la synthèse de l'état des connaissances scientifiques sur le sujet. Le constat est sans appel, le réchauffement climatique à l'œuvre est causé par les activités humaines et atteint déjà  $+1,1^\circ C$  par rapport à l'ère préindustrielle.*

*Par son ampleur, le changement climatique entraîne la multiplication des événements climatiques extrêmes (sécheresses, dômes de chaleurs, inondations, ouragans) et affecte d'ores et déjà notre quotidien.*

*Le seuil du changement climatique se mesure à partir de la concentration en  $CO_2$  de l'atmosphère, qui doit être inférieure à 350 parties par million (ppm). »*

Déterminer quand la limite planétaire du changement climatique a été franchie selon cette modélisation.

17. Dans l'article « [PPM : à quoi correspond cette unité de mesure de la pollution?](https://www.geo.fr/environnement/ppm-a-quoi-correspond-cette-unite-de-mesure-de-la-pollution-193340) » sur le site officiel du magazine *Geo* à l'url <https://www.geo.fr/environnement/ppm-a-quoi-correspond-cette-unite-de-mesure-de-la-pollution-193340>, on lit :

*« Une atmosphère à 400 ppm signifie qu'il y a 400 molécules polluées sur 1 million de molécules d'air. Même pendant la révolution industrielle du XIX<sup>ème</sup> siècle et la combustion massive des énergies fossiles, le taux de ppm n'avait jamais excédé les 300. Les prévisions estiment que d'ici 2030, le taux de ppm moyen dans l'atmosphère atteindra les 450.*

*Les risques d'un taux de molécules trop élevé sont nombreux. Dès 0,1 % de pollution de l'air (1 000 ppm), les conséquences sur la santé peuvent être irréversibles : asthme, maladies respiratoires et cardio-vasculaires. L'impact sur le réchauffement climatique est d'autant plus grave : plus l'indice moyen est élevé, plus on observera au fil des années une augmentation importante de la chaleur atmosphérique. À cet effet, le ppm est un indicateur important pour échelonner les risques et mieux comprendre où nous nous situons en termes de pollution atmosphérique. »*

Déterminer quand l'air pourra avoir des conséquences irréversibles sur la santé selon cette modélisation.

## Sources

- article « Qu'est-ce qu'un forçage climatique? » de David Saint-Martin et Olivier Boucher sur [www.climat-en-questions.fr](http://www.climat-en-questions.fr) à l'URL <https://www.climat-en-questions.fr/reponse/forçage-climatique-par-david-saint-martin-olivier-boucher>
- courbe de Keeling illustrant la concentration mensuelle moyenne de CO<sub>2</sub> mesurée à l'Observatoire de Mauna Loa, reflétant la progression continue des niveaux de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère terrestre depuis 1958 sur Wikimedia Commons à l'URL [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Mauna\\_Loa\\_CO2\\_monthly\\_mean\\_concentration\\_FR.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Mauna_Loa_CO2_monthly_mean_concentration_FR.svg)
- article « Les 9 limites planétaires » sur [agence-lucie.com](http://agence-lucie.com) à l'URL <https://agence-lucie.com/limites-planetaires>
- page du « Global Monitoring Laboratory » proposant des données relatives aux mesures des taux de CO<sub>2</sub>, de CH<sub>4</sub>, de N<sub>2</sub>O et de SF<sub>6</sub> enregistrées depuis le volcan Mauna Loa dans l'île de Hawaï à l'URL <https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html>
- page de données textuelles des mesures mensuelles de CO<sub>2</sub> à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « noaa logo Global Monitoring Laboratory » à l'URL [https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2\\_mm\\_mlo.txt](https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.txt)
- fichier de données au format CSV (Comma-separated values) des mesures mensuelles de CO<sub>2</sub> à l'Observatoire de Mauna Loa, illustrant la concentration atmosphérique détaillée depuis 1958 sur le site du « Global Monitoring Laboratory » à l'URL [https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2\\_mm\\_mlo.txt](https://gml.noaa.gov/webdata/ccgg/trends/co2/co2_mm_mlo.txt)
- page de documentation concernant la fonction `curve_fit` du module `scipy.optimize` de *Python* sur la documentation officielle en ligne du module *Scipy* à l'URL [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\\_fit.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html)
- article « PPM : à quoi correspond cette unité de mesure de la pollution? » sur le site officiel du magazine *Geo* à l'URL <https://www.geo.fr/environnement/ppm-a-quoi-correspond-cette-unite-de-mesure-de-la-pollution-193340>