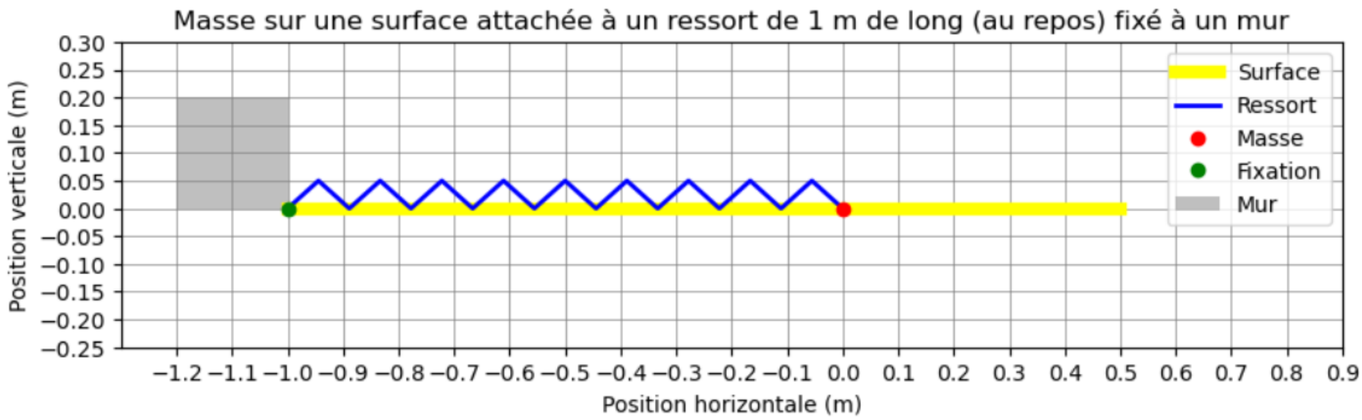
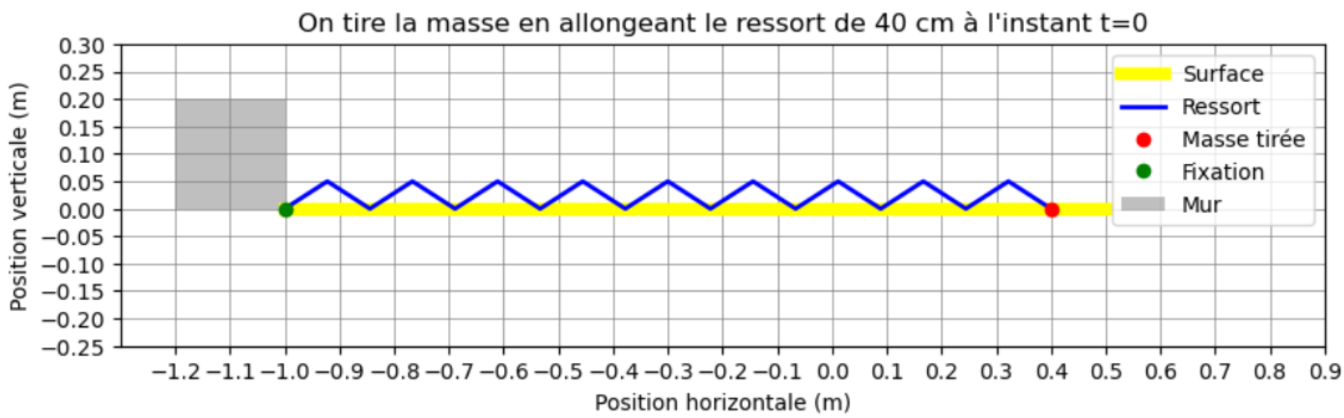
ÉTUDE DE CAS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Une masse m de 2 kg est posée sur une surface horizontale et est attachée à un ressort idéal de constante de raideur $k = 8\ N/m$ et de longueur au repos de 1 m. Ce ressort est fixé à un mur à son autre extrémité :



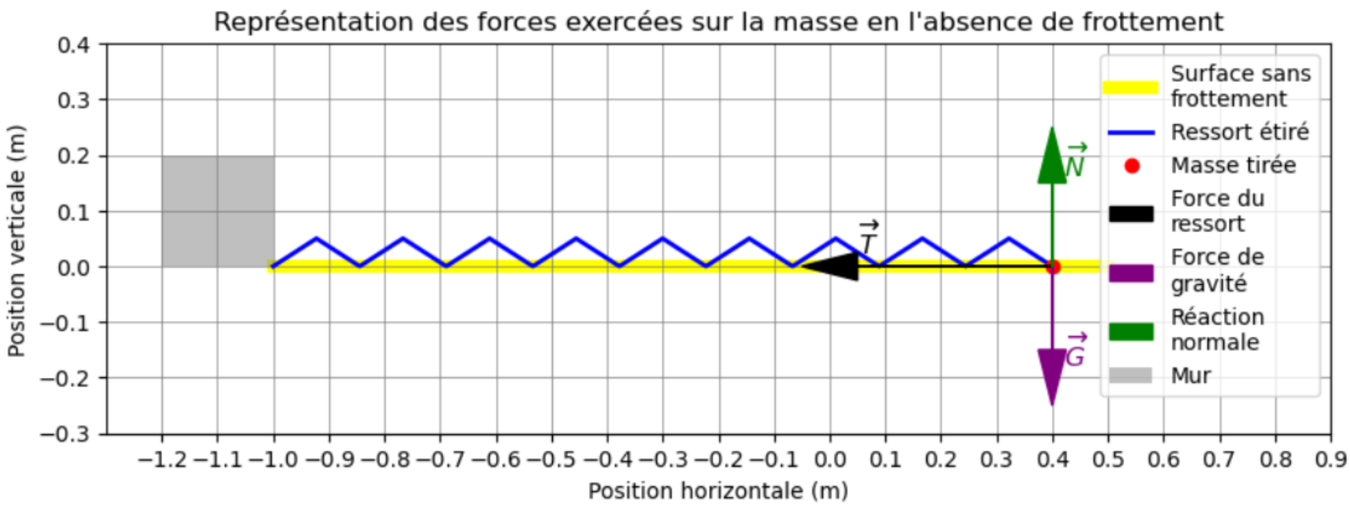
La masse est tirée de sa position d'équilibre et déplacée de 40 cm avant d'être relâchée sans vitesse initiale.



I. **Sans frottement :**

On suppose que le système évolue sans frottement ni autres forces extérieures. La masse n'est donc soumise qu'aux trois forces suivantes :

- La force du ressort $\overrightarrow{T}$: Cette force agit toujours dans le sens opposé à la déformation du ressort. À l'instant $t = 0$, puisque le ressort est étiré, la force du ressort tente de ramener la masse vers la position de l'extrémité non fixé au mur du ressort quand celui-ci est au repos (n'est pas déformé). Elle est due à la loi de Hooke, qui stipule que la force exercée par un ressort est proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort par rapport à sa longueur au repos. Le coefficient de proportionnalité est appelé la constante de raideur.
- La force de gravité $\overrightarrow{G}$: Cette force agit verticalement vers le bas, attirant la masse vers le centre de la Terre. Elle est due à l'attraction gravitationnelle entre la masse de la Terre et la masse représentée en rouge.
- La réaction normale $\overrightarrow{N}$: C'est la force de support que la surface exerce sur la masse. La masse étant en contact avec la surface horizontale, cette force est verticale et dirigée vers le haut, exactement opposée à la force de gravité. Elle résulte du troisième principe de Newton, selon lequel à chaque action correspond une réaction égale et opposée. Cela signifie que si un objet exerce une force sur une surface, la surface exerce une force de magnitude égale mais de direction opposée sur l'objet.



Comme dans les figures, on se place dans le référenciel $\mathscr{R} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où :

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ représente la position de la masse quand le ressort est au repos.
- $\overrightarrow{i}$ représente le déplacement horizontal d'un mètre dans la direction où le ressort s'étire. Le ressort au repos est donc d'extrémités $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{j}$ représente le déplacement vertical d'un mètre vers le haut.

On note $M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}_{\mathscr{R}}$ la position de la masse à l'instant t dans le référenciel $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix}-kx(t)\\0\end{pmatrix}_{\mathscr{R}} = -kx(t)\,\overrightarrow{i}$$

1. En appliquant la deuxième loi de Newton (appelée aussi le principe fondamental de la dynamique), on obtient :

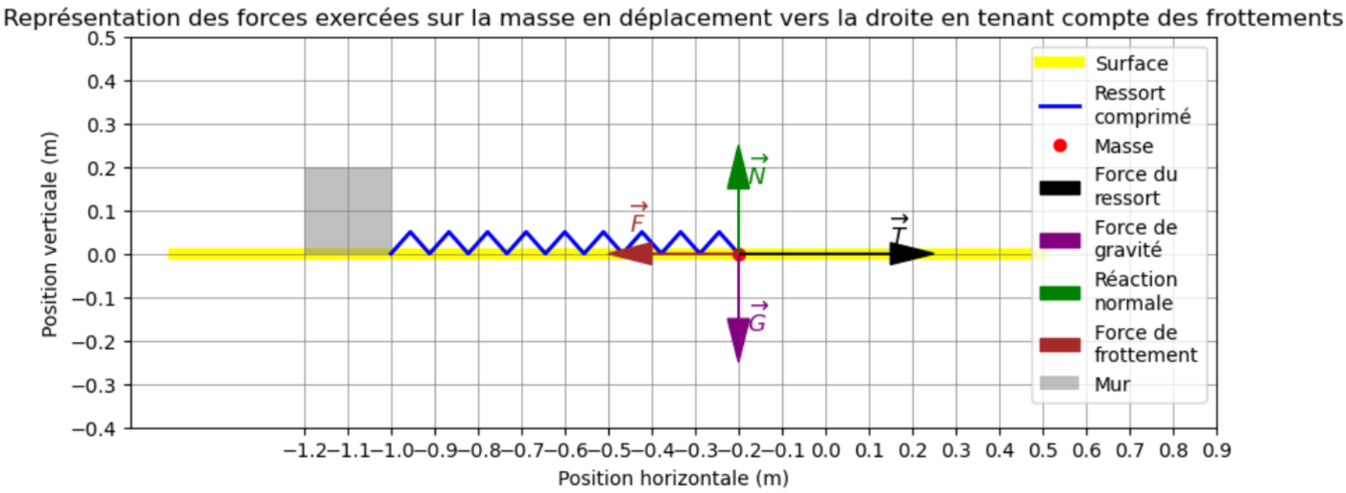
$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) + \overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{N}(t)$$
$$mM''(t) = \overrightarrow{T}(t) \qquad \text{(car } \overrightarrow{N}(t) = -\overrightarrow{G}(t) \text{ d'après le troisième principe de Newton)}$$

   En déduire une équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

2. *a*) Déterminer l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente.
   b) Déterminer la ou les solutions de l'équation caractéristique.
   c) Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$.

II. **Avec frottement :** *(Questions bonus)*

On ajoute maintenant une force de frottement notée $\overrightarrow{F}$.



On suppose que :

$$\overrightarrow{F}(t) = -ax'(t)\,\overrightarrow{i} \qquad \text{où } a \text{ est une constante positive}$$

1. Déterminer une équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2. Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de $x(t)$ dans le cas où $a = 2\ kg/s$.