EXERCICES AVEC COURS INTÉGRÉ SUR LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

S. Labopin

Table des matières

1 Conventions et abus de langage de ce document **2**

1.1 Concernant les fonctions qui font correspondre chaque nombre à un nombre . . . 2

1.2 Concernant les applications qui font correspondre chaque fonction à une fontion . . . 2

2 La transformation de Laplace **3**

2.1 Motivation de construire une navette allant du monde de l'analyse au monde de l'algèbre . . . 3

2.2 Un exemple très simple de voyage aller-retour entre le monde de l'analyse et le monde de l'algèbre pour résoudre un problème de Cauchy . . . 4

2.3 Définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle (« Construction de la navette allant du monde de l'analyse au monde de l'algèbre ») . . . 5

2.4 Calculs de la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles . . . 6

2.5 Propriétés vérifiées par la transformation de Laplace . . . 7

2.6 Déterminer une fonction dont on connaît la transformée de Laplace (« Retrouver l'original ») . . . 8

3 Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre des problèmes de Cauchy linéaires et à coefficients constants **8**

4 Applications électrocinétiques **9**

4.1 Réponse d'un circuit RC à une excitation constante et définition d'une fonction de transfert . . . 9

4.2 Limitations de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle . . . 10

4.3 Définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle . . . 11

4.4 Propriétés vérifiées par la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle . . . 12

4.5 Réponse d'un circuit RC à une excitation en créneau . . . 13

4.6 Réponse d'un circuit RLC série sous-amorti à une impulsion . . . 13

4.7 Réponse d'un circuit RLC série critiquement-amorti à une impulsion . . . 17

4.8 Réponse d'un circuit RLC série sur-amorti à une impulsion . . . 17

1 Conventions et abus de langage de ce document

1.1 Concernant les fonctions qui font correspondre chaque nombre à un nombre

On utilise parfois la notation $f(t)$ pour désigner la fonction f (alors que cette notation désigne normalement l'image de t par la fonction f, c'est-à-dire le nombre auquel la fonction f fait correspondre le nombre t).
Par exemple :

- « $\frac{1}{t-2}$ » peut désigner la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t-2} \end{array}$ qui, à chaque nombre réel t appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, associe le nombre réel $\frac{1}{t-2}$ et non un nombre réel $\frac{1}{t-2}$ où t est aussi un nombre réel.
  « $\frac{1}{t-2}$ » peut même aussi désigner la fonction $\begin{array}{ccc}]2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t-2} \end{array}$ qui, à chaque nombre réel t appartenant à $]2;+\infty[$, associe le nombre réel $\frac{1}{t-2}$. Ce n'est pas le même concept car l'ensemble de départ est différent.
- « 2 » peut désigner la fonction constante $t \mapsto 2$ et non le nombre réel 2.
- « $\frac{1}{(t-2)(t-i)}$ » peut désigner la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{(t-2)(t-i)} \end{array}$ qui, à chaque nombre réel t appartenant à $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, associe le nombre complexe $\frac{1}{(t-2)(t-i)}$ et non un nombre complexe $\frac{1}{(t-2)(t-i)}$ où t est un nombre réel.

1.2 Concernant les applications qui font correspondre chaque fonction à une fonction

La notation $\mathscr{L}$ désigne une application que l'on va définir dans ce document (et appelée « **Transformation de Laplace** »). Cette application est différente des exemples dont on a l'habitude comme ceux présentés dans le point précédent (« $t \mapsto \frac{1}{t-2}$ », « $t \mapsto 2$ » et « $t \mapsto \frac{1}{(t-2)(t-i)}$ ») et que l'on appelle souvent des « fonctions ».
En effet, plutôt que de **faire correspondre chaque nombre** (de son ensemble de définition) **à un nombre** (de son ensemble d'arrivée), **cette application $\mathscr{L}$ fait correspondre chaque fonction** (de son ensemble de définition) **à une fonction** (de son ensemble d'arrivée) :

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{L} & : \textbf{?} & \to & \textbf{?} \\ & f & \mapsto & \mathscr{L}(f) \end{array} \qquad \text{(On verra plus tard ce que sont les ?)}$$

En fait, on manipule déjà des applications aussi abstraites depuis longtemps comme par exemple les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{D} & : \text{ensemble des fonctions définies et dérivables sur } \mathbb{R} & \to & \text{ensemble des fonctions définies sur } \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \psi & : \text{ensemble des fonctions définies sur } [0;1] & \to & \text{ensemble des fonctions définies sur } [2;3] \\ & f & \mapsto & \boxed{\begin{array}{cccc} \psi(f) : & [2;3] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t-2) \end{array}} \end{array}$$

Notation (Image d'une fonction par une application)
Quand $\mathscr{A}$ est une telle application qui, à chaque fonction, associe une fonction, plutôt que de noter comme d'habitude « $\mathscr{A}(f)$ » **l'image de la fonction f par l'application $\mathscr{A}$, on la note parfois** comme suit :

$$\boxed{\left[\mathscr{A}\left(f(t)\right)\right](p)}$$

Par exemple, en reprenant les applications $\mathscr{D}$ et ψ précédentes, on a :

- On écrit parfois « $[\mathscr{D}(\sin(t))](p) = \cos(p)$ » plutôt que « $\mathscr{D}(\sin) = \cos$ » pour dire que « l'image de la fonction sin par l'application $\mathscr{D}$ est la fontion cos ».
- On écrit parfois « $[\psi(t^2)](p) = (p-2)^2$ » plutôt que « $\psi\left(\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}\right) = \begin{array}{ccc} [2;3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t-2)^2 \end{array}$ » pour dire que « l'image de la fonction $\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$ par l'application ψ est la fontion $\begin{array}{ccc} [2;3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t-2)^2 \end{array}$ ».
- On écrit parfois « $[\mathscr{L}(f(t))](p)$ » ou « $[\mathscr{L}(f)](p)$ » plutôt que « $\mathscr{L}(f)$ » pour exprimer l'image de la fonction f par l'application $\mathscr{L}$ appelée aussi la transformée de Laplace de f.

2 La transformation de Laplace

2.1 Motivation de construire une navette allant du monde de l'analyse au monde de l'algèbre

(Si cette section est difficile à comprendre, lire en même temps la section qui la suit. Cette dernière l'illustre en effet avec un exemple simple pour faciliter la compréhension.)

On cherche un outil abstrait $\mathscr{L}$ qui transforme chaque fonction $f(t)$ en une fonction $[\mathscr{L}(f(t))](p)$ tout en transformant un problème d'analyse consistant en la résolution d'une équation différentielle linaire à coefficients constants...

Problème d'analyse

« Déterminer les fonctions f tel que

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ a_n \frac{d^n}{dt^n}(f(t)) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(f(t)) + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(f(t)) + \dots + a_2\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) + a_1\frac{d}{dt}(f(t)) + a_0 f(t) = b(t) \text{ »}$$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des constantes et b une fonction

$$\Big\downarrow \mathscr{L}$$

....en un problème d'algèbre consistant en la résolution d'une équation algébrique.

Problème d'algèbre

« Pour tout $p \in]a; +\infty[$, déterminer le nombre $[\mathscr{L}(f)](p)$ tel que
$Q(p) \times [\mathscr{L}(f)](p) = P(p)$ »
où P, Q sont des fonctions polynomiales

En effet, une telle **navette entre le monde de l'algèbre et le monde de l'analyse** transporterait une solution f de l'équation différentielle que l'on cherche à déterminer en une fonction rationnelle :

$$\forall\ p \in]a; +\infty[,\ Q(p) \times [\mathscr{L}(f)](p) = P(p)$$

$$\forall\ p \in]c; +\infty[,\ [\mathscr{L}(f)](p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \qquad \text{(avec } c \text{ plus grand que } a \text{ et que toutes les racines de } Q\text{)}$$

$$\mathscr{L}(f) = \frac{P}{Q}$$

$$\mathscr{L} : f \mapsto \frac{P}{Q}$$

$$f \overset{\mathscr{L}}{\mapsto} \frac{P}{Q}$$

Le monde de l'analyse	Navette $\mathscr{L}$ $\longrightarrow$	Le monde de l'algèbre
Une solution f de l'équation différentielle		Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

Et donc il suffirait de **prendre la navette en sens inverse depuis la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ pour arriver directement à la destination visée f**, une solution de l'équation différentielle :

Le monde de l'analyse	Navette $\mathscr{L}^{-1}$ $\longleftarrow$	Le monde de l'algèbre
Une solution f de l'équation différentielle		Une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$

2.2 Un exemple très simple de voyage aller-retour entre le monde de l'analyse et le monde de l'algèbre pour résoudre un problème de Cauchy

(La correction de cette section est disponible sur le site. Si cette section est difficile à comprendre, s'aider de sa correction.)

1) Dans cet exercice, on illustre l'abstraction de la section précédente avec un exemple très concret consistant en la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait déjà réussi à construire une navette $\mathscr{L}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

> (i) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et pour g_1, g_2 deux fonctions, on a :
>
> $$[\mathscr{L}(a \,.\, g_1(t) + b \,.\, g_2(t))](p) = a \,.\, [\mathscr{L}(g_1(t))](p) + b \,.\, [\mathscr{L}(g_2(t))](p)$$
>
> (ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :
>
> $$[\mathscr{L}(e^{\alpha t})](p) = \frac{1}{p-\alpha}$$
>
> (iii) Pour toute fonction dérivable g, on a :
>
> $[\mathscr{L}(g'(t))](p) = p \times [\mathscr{L}(g(t))](p) - g(0)$ (La dérivation devient des opérations algébriques!)

On note f une solution de ce problème de Cauchy.
On a donc :

$$\begin{cases} f'(t) + 2f(t) = e^t \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) En utilisant la propriété (ii), calculer $[\mathscr{L}(e^t)](p)$.

b) En utilisant les propriétés (i) et (iii), démontrer que :

$$[\mathscr{L}(f'(t) + 2f(t))](p) = (p+2) \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - 1$$

c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{p}{(p-1)(p+2)}$$

d) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{p}{(p-1)(p+2)}$ en éléments simples.

e) En utilisant la propriété (ii), déterminer une fonction g telle que :

$$[\mathscr{L}(g(t))](p) = \frac{1}{p+2}$$

f) En utilisant la propriété (i), déduire des trois questions précédentes et de la question a) que :

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \left[\mathscr{L}\left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}\right)\right](p)$$

g) Vérifier que la fonction $\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}$ est la solution du problème de Cauchy.

Dans cet exemple « anticipé », on voit clairement que ce qui a permis de transformer le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d'inconnue y en l'équation algébrique $(p+2) \times [\mathscr{L}(f)](p) - 1 = \frac{1}{p-1}$ d'inconnue $[\mathscr{L}(f)](p)$ (« pour p fixé ») sont les propriétés (i) et (iii) et que ce qui a permis de retrouver la fonction $f(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}$ à partir de la connaissance de sa transformée de Laplace $\frac{p}{(p-1)(p+2)}$ est la propriété (ii).

2.3 Définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle (« Construction de la navette allant du monde de l'analyse au monde de l'algèbre »)

Définition (Transformée de Laplace d'une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle)

(Si cette définition est difficile à comprendre, ne mémoriser que ce qui est en bleu)

On appelle **transformation de Laplace** l'application suivante :

$\mathscr{L}$: Ensemble des fonctions (à valeurs dans $\mathbb{C}$) définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et **à croissance au plus exponentielle (cette dernière notion est définie ci-dessous).** $\longrightarrow$ Ensemble des fonctions (à valeurs dans $\mathbb{C}$) définies sur un intervalle de la forme $]a, +\infty]$.

$$f \longmapsto \mathscr{L}(f) : \boxed{\begin{array}{rcl} \overbrace{\left]a(f)\,;\,+\infty\right]}^{a(f)\text{ est défini ci-dessous}} & \to & \mathbb{C} \\ p & \mapsto & \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt}_{[\mathscr{L}(f(t))](p)} \end{array}}$$

- Autrement dit, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par la formule suivante :

$$\boxed{[\mathscr{L}(f(t))](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt} \quad \text{(à savoir par cœur)}$$

- On dit que f est **à croissance au plus exponentielle** lorsqu'il existe des nombres réels $M \geq 0$, $r \geq 0$ et a tels que pour tout $t \geq r$, $|f(t)| \leq Me^{at}$.
  En effet, pour de tels nombres M, r et a, on a :

$$\forall\ p > a,\ \forall\ t \geq r,\ \left|e^{-pt} f(t)\right| \leq \underbrace{Me^{t(a-p)}}_{\text{Rappelons que l'intégrale généralisée } \int_0^{+\infty} Me^{t(a-p)}\,dt \text{ est convergente quand } p>a.}$$

  Et donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées, l'expression « $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ » est bien définie pour $p > a$ et désigne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} e^{-pt} f(t)\,dt$$

  Ainsi, pour de tels nombres, la fonction $p \mapsto [\mathscr{L}(f(t))](p)$ est bien définie sur $]a, +\infty[$.

- Le plus petit réel a tel que la fonction $p \mapsto [\mathscr{L}(f(t))](p)$ est bien définie sur $]a, +\infty[$ est noté dans cette définition $\boldsymbol{a(f)}$ et est appelé **l'abscisse de convergence de $\boldsymbol{f}$**.
- En réalité, on peut vérifier que la transformée de Laplace $[\mathscr{L}(f(t))](p)$ d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle est définie sur le demi-plan formé par les nombres complexes dont la partie réelle est strictement supérieure à l'abscisse de convergence $a(f)$ de f, c'est-à-dire $\{p \in \mathbb{C} \mid \mathscr{R}e(p) > a(f)\}$. La transformée de Laplace d'une fonction est donc en réalité une fonction de la variable complexe et dispose même d'une formule d'inversion pour « retrouver une fonction quand on connaît sa transformée de Laplace » :

$$\forall b > a(f),\ f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(b+iu)\,.\,t}\,.\,[\mathscr{L}(f(t))](b+iu) \times \underbrace{\frac{d(b+iu)}{du}}_{=i} du \overset{\text{notation}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_{b-i.\infty}^{b+i.\infty} e^{zt}\,.\,[\mathscr{L}(f(t))](z)\,dz$$

2.4 Calculs de la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

1) *a*) Démontrer que :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \left[\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](p) = \frac{1}{p-\alpha} \qquad \text{(à savoir par cœur)}}$$

Commentaire : Il s'agit donc de démontrer la propriété (ii) mentionnée dans l'exercice de la section 2.2 et qui permet de déterminer une fonction qui a pour transformée de Laplace un certain élément simple de $\mathbb{C}(X)$.

b) En déduire que :

$$[\mathcal{L}(1)](p) = \frac{1}{p}$$

2) *a*) Via une intégration par parties, démontrer que :

$$[\mathcal{L}(t)](p) = \frac{1}{p^2}$$

b) Via une intégration par parties, démontrer que :

$$\left[\mathcal{L}\left(t^2\right)\right](p) = \frac{2}{p} \cdot [\mathcal{L}(t)](p)$$

c) En déduire que :

$$\left[\mathcal{L}\left(t^2\right)\right](p) = \frac{2}{p^3}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Via une intégration par parties, démontrer que :

$$\left[\mathcal{L}\left(t^{n+1}\right)\right](p) = \frac{n+1}{p} \cdot \left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](p)$$

e) Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left[\mathcal{L}\left(t^n\right)\right](p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad \text{(à savoir par cœur)}}$$

3) Soit $\omega \in \mathbb{R}$.
On note $f(t) = e^{i\omega t}$.

a) Démontrer que :

$$[\mathcal{L}(f(t))](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} + i \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

b) Écrire $f(t)$ sous forme algébrique, c'est-à-dire recopier et compléter :

$$f(t) = \underbrace{\ldots}_{\in\mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\ldots}_{\in\mathbb{R}}$$

c) On admet encore sans démonstration la propriété (i) de l'exercice de la section 2.2 (appelée propriété de linéarité de la transformation de Laplace) :

> Si a et b sont deux complexes et si g_1 et g_2 sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle, alors on a :
>
> $$[\mathcal{L}(a \cdot g_1(t) + b \cdot g_2(t))](p) = a \cdot [\mathcal{L}(g_1(t))](p) + b \cdot [\mathcal{L}(g_2(t))](p)$$

En appliquant la propriété de linéarité de la transformation de Laplace, écrire $[\mathcal{L}(f(t))](p)$ sous forme algébrique.

d) En déduire que :

$$\boxed{[\mathcal{L}(\cos(\omega t))](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \text{(à savoir par cœur)}}$$

$$\boxed{[\mathcal{L}(\sin(\omega t))](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad \text{(à savoir par cœur)}}$$

2.5 Propriétés vérifiées par la transformation de Laplace

1) Démontrer la propriété de linéarité de la transformation de Laplace :

> Si a et b sont deux complexes et si g_1 et g_2 sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle, alors on a :
>
> $[\mathscr{L}(a \,.\, g_1(t) + b \,.\, g_2(t))](p) = a \,.\, [\mathscr{L}(g_1(t))](p) + b \,.\, [\mathscr{L}(g_2(t))](p)$ (à savoir par cœur)

Commentaire : Il s'agit donc de démontrer la propriété (i) mentionnée dans l'exercice de la section 2.2.

2) Utiliser la propriété de linéarité de la transformation de Laplace et les transformées de Laplace calculées dans la section précédente pour calculer $[\mathscr{L}(2t^2 - 1)](p)$.

3) Démontrer la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace :

> Si α est un complexe et si g est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle, alors on a :
>
> $[\mathscr{L}(e^{\alpha t} g(t))](p) = [\mathscr{L}(g(t))](p - \alpha)$ (à savoir par cœur)

4) Utiliser la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace et les transformées de Laplace calculées dans la section précédente pour calculer $[\mathscr{L}(\cos(\frac{2}{3}t)\, e^{2t})](p)$.

5) Utiliser la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace et les transformées de Laplace calculées dans la section précédente pour calculer $[\mathscr{L}(te^{4t})](p)$.

6) Calculer $[\mathscr{L}(\cos^3(t)\, e^t)](p)$.

7) Démontrer la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée :

> Si g est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, à croissance au plus exponentielle et dont la dérivée g' est à croissance au plus exponentielle, alors on a :
>
> $[\mathscr{L}(g'(t))](p) = p \times [\mathscr{L}(g(t))](p) - g(0)$ (à savoir par cœur)

Commentaire : Il s'agit donc de démontrer la propriété (iii) mentionnée dans l'exercice de la section 2.2.
⚠ On voit plus loin une définition plus générale de la transformation de Laplace pour des fonctions qui ne sont plus continues et pour laquelle cette formule n'est plus vraie.

8) On note :

$$f(t) = 1 - \cos(t) \qquad\qquad g(t) = e^{-t} f(t)$$

   a) Démontrer que : $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$

   b) En utilisant la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée, en déduire que : $[\mathscr{L}(e^t g(t))](p) = \frac{(p-1)^2}{p(p^2+1)}$

Il faut aussi connaître les deux propriétés suivantes (dont les démonstrations dépassent le cadre de ce cours).
On les utilise en particulier dans la section suivante.

- Propriété de dérivation d'une transformée de Laplace :

> Si g est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle, alors on a :
>
> $[\mathscr{L}(g(t))]'(p) = -[\mathscr{L}(t \,.\, g(t))](p)$ (à savoir par cœur)

- Propriété d'injectivité de la transformation de Laplace :

> Soient g_1 et g_2 deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle.
>
> Si $[\mathscr{L}(g_1(t))](p) = [\mathscr{L}(g_2(t))](p)$, alors $g_1(t) = g_2(t)$. (à savoir par cœur)

9) En utilisant la propriété de dérivation d'une transformée de Laplace, calculer $[\mathscr{L}(te^t)](p)$

10) En utilisant la propriété de dérivation d'une transformée de Laplace, calculer $[\mathscr{L}(t^2 e^{2t})](p)$

2.6 Déterminer une fonction dont on connaît la transformée de Laplace (« Retrouver l'original »)

1) Déterminer une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle dans chacun des cas suivants :
   a) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)}$
   b) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{-1}{(p-2)^2}$
   c) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{5p+10}{p^2+3p-4}$
   d) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{p-7}{p^2-14p+50}$
   e) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{p}{p^2-6p+13}$
   f) $[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{e^{-2p}}{p+3}$

3 Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre des problèmes de Cauchy linéaires et à coefficients constants

1) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) + y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

On note f la solution de ce problème de Cauchy et on suppose que f est à croissance au plus exponentielle.
   a) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{p}{(p-1)(p+1)}$ en éléments simples.
   b) En déduire une fonction g à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle telle que :

$$[\mathscr{L}(g(t))](p) = \frac{p}{(p-1)(p+1)}$$

   c) Démontrer que :

$$[\mathscr{L}(f'(t) + f(t))](p) = (p+1)[\mathscr{L}(f(t))](p) - 1$$

   d) En déduire que f et g ont la même transformée de Laplace.
   e) Achever la résolution de ce problème de Cauchy en déterminant f.

2) Résoudre le problème de Cauchy suivant en utilisant la transformation de Laplace (sans utiliser le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \right.$$

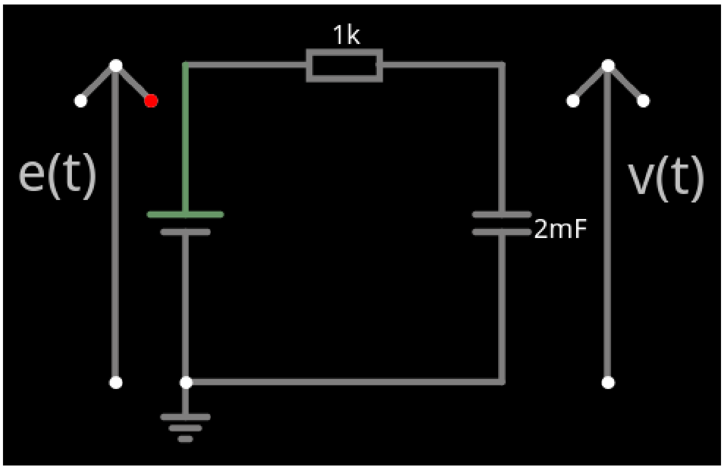
3) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) + y'(t) + y(t) = te^t \\ \forall\ k \in [\![0;2]\!],\ y^{(k)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

4 Applications électrocinétiques

4.1 Réponse d'un circuit RC à une excitation constante et définition d'une fonction de transfert

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante :



- La tension aux bornes du générateur est constante égale à 1 V.
- La résistance R est de 1 000 Ω,
- Le condensateur est de capacité $C = 2\ mF$.
- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note :

- $e(t)$ la tension aux bornes du générateur à l'instant t,
- $v(t)$ la tension aux bornes du condensateur à l'instant t,
- $E(p)$ la transformée de Laplace de $e(t)$. Autrement dit :

$$E(p) = [\mathscr{L}(e(t))](p)$$

- $V(p)$ la transformée de Laplace de $v(t)$. Autrement dit :

$$V(p) = [\mathscr{L}(v(t))](p)$$

Définition-exemple (**Excitation** d'un système, **réponse** d'un système à une excitation et **fonction de transfert**)
On appelle **fonction de transfert** la fonction par laquelle il faut multiplier la transformée de Laplace de la fonction modélisant **l'excitation à laquelle on soumet un système** pour obtenir la transformée de Laplace de la fonction modélisant **la réponse de ce système à cette excitation**.
Par exemple, dans le contexte actuel :

- Le **système** est le circuit RC série sans le générateur (ou quand le générateur ne délivre aucune tension).
- La tension $e(t)$ aux bornes du générateur est l'**excitation** de ce système.
- La tension $v(t)$ aux bornes du condensateur est la **réponse** de ce système à cette l'excitation.
-

La fonction de transfert est la fonction $T(p)$ telle que :

$$\underbrace{V(p)}_{\text{transformée de Laplace de la réponse}} = \underbrace{T(p)}_{\text{fonction de transfert}} \times \underbrace{E(p)}_{\text{transformée de Laplace de l'excitation}}$$

1) Calculer $E(p)$, la transformée de Laplace de l'excitation causée par le générateur sur le circuit RC.

2) Démontrer que :

$$RCv'(t) + v(t) = e(t)$$

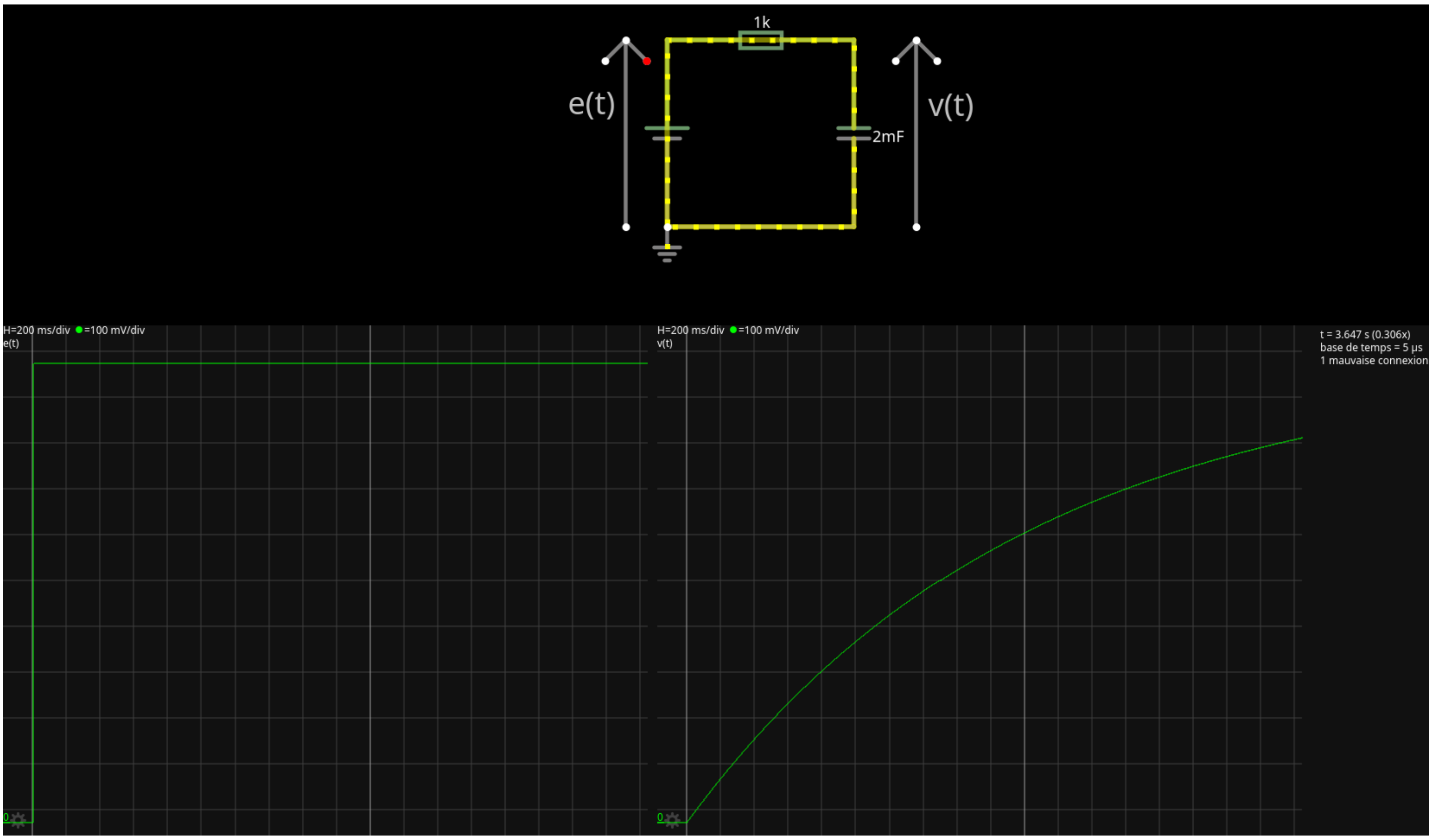
3) En déduire que la fonction de transfert est définie par la formule suivante :

$$T(p) = \frac{1}{2p+1}$$

4) En déduire que :

$$V(p) = \frac{1}{p(2p+1)}$$

5) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{p(2p+1)}$ en éléments simples.
6) En déduire $v(t)$, la réponse du système.
7) En utilisant l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator », vérifier les résultats obtenus avec une simulation :



4.2 Limitations de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle

⚠ La définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle n'est pas applicable à certains scénarios réels en ingénierie et en physique comme par exemple quand on excite le circuit RC de la section précédente avec des impulsions ou des signaux en créneaux puisque de telles excitations ne sont pas modélisables par des fonctions continues.

C'est pourquoi, avant d'utiliser la transformation de Laplace pour étudier l'excitation d'un circuit RC par un signal créneau, on doit d'abord dans la section suivante définir la transformation de Laplace sur un ensemble de fonctions comprenant des fonctions comportant des discontinuités.

4.3 Définition de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle

(Ne pas se décourager si ces définitions sont difficiles à comprendre.

L'important est de comprendre que l'on définit avec la même formule la transformée de Laplace d'une fonction continue par morceaux, d'avoir une idée de ce qu'est une fonction continue par morceaux avec un dessin et de comprendre qu'un signal en créneau ou une impulsion se modélise avec une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$.)

Définition (Fonction **continue par morceaux**)
On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle est **continue par morceaux** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur chaque intervalle de longueur fini de son domaine de définition.
- En chaque point de discontinuité, f admet une limite à droite (si ce n'est pas la borne supérieure de son domaine de définition) et une limite à gauche (si ce n'est pas la borne inférieure de son domaine de définition).

Par exemple, la fonction h suivante est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \rightarrow & \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ e^t & \text{si } t \in [1,2[\\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

En effet, h est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 1 et en 2 et ses limites suivantes sont définies et finies :

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t<1}} h(t) = 0 \qquad \lim_{\substack{t \to 1 \\ t>1}} h(t) = e \qquad \lim_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} f(t) = e^2 \qquad \lim_{\substack{t \to 2 \\ t>2}} f(t) = 0$$

Définition (**Intégrale d'une fonction continue par morceaux**)
Si f est continue par morceaux sur un intervalle $]a,b[$, on définit son intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ par une somme d'intégrales de fonctions continues en prolongeant par continuité chacune de ses restrictions aux intervalles où elle est continue.

Par exemple, on peut calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction h définie ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} h(t)\,dt = \int_0^1 h(t)\,dt + \int_1^2 h(t)\,dt + \int_2^{+\infty} h(t)\,dt = \int_1^2 e^t\,dt = \left[e^t\right]_1^2 = e^2 - e$$

Définition (Transformée de Laplace d'une fonction définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle)
Lorsqu'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle n'est pas continue mais qu'elle est tout de même continue par morceaux (comme l'est par exemple un signal en créneau), on peut encore définir sa transformée de Laplace comme suit via la définition de l'intégrale précédente :

$$\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Et cette définition reste encore valable même si f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, comme par exemple pour modéliser un signal « qui commence à $t = 0$ ou après ».

Par exemple, on peut calculer la transformée de Laplace de la fonction h définie ci-dessus :

$$\begin{aligned} \left[\mathscr{L}(h(t))\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} h(t)\,dt \\ &= \int_0^1 e^{-pt} h(t)\,dt + \int_1^2 e^{-pt} h(t)\,dt + \int_2^{+\infty} e^{-pt} h(t)\,dt \\ &= \int_0^1 e^{-pt} \times 0\,dt + \int_1^2 e^{-pt} e^t\,dt + \int_2^{+\infty} e^{-pt} \times 0\,dt \\ &= \int_1^2 e^{-pt} e^t\,dt \\ &= \frac{e^{2\times(1-p)}}{1-p} - \frac{e^{1\times(1-p)}}{1-p} \\ &= \frac{e^{2\times(1-p)} - e^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

Définition (**Fonction échelon unité de Heaviside**)
On note $\mathscr{U}$ et on appelle **fonction échelon unité de Heaviside** la fonction suivante :

$$\mathscr{U} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

1) Calculer $[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)$.
2) Tracer le graphe de la fonction créneau $\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-2)$ et calculer sa transformée de Laplace.

4.4 Propriétés vérifiées par la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle

⚠ À l'exception des propriétés de dérivation et d'injectivité de la transformée de Laplace, toutes les propriétés et formules de la section « Propriétés vérifiées par la transformation de Laplace » restent valables pour la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.

1) Démontrer la propriété de translation de la transformation de Laplace :

Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.

$$\forall\, t_0 \in \mathbb{R}^+,\ [\mathscr{L}(g(t-t_0))](p) = e^{-t_0 p}\,[\mathscr{L}(g(t))](p) \qquad \text{(à savoir par cœur)}$$

⚠

- e^t n'est pas dans le domaine de définition de cette nouvelle définition de la transformation de Laplace car elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- En revanche, $\mathscr{U}(t)\,e^t$ est bien une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.
- Soit $t_0 > 0$. Alors $\mathscr{U}(t-t_0)\,e^{t-t_0}$ est elle aussi dans le domaine de définition de cette nouvelle définition de la transformation de Laplace et elle s'annule aussi sur $[0; t_0[$.
- On a donc par exemple avec cette nouvelle définition de la transformation de Laplace $[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t)\,.\,e^t)](p) = \frac{1}{p}$ mais on ne doit plus écrire ce qui est barré dans $\cancel{[\mathscr{L}(e^t)](p) = \frac{1}{p}}$ car e^t n'est pas dans le domaine de définition de cette nouvelle définition de la transformation de Laplace.

2) *a*) En prenant garde à l'encadré précédent et en utilisant la propriété de translation de la transformation de Laplace, recopier et compléter la recherche d'original suivante :

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2p}}{p} &= e^{-2p}\,.\,[\mathscr{L}(\ldots)](p) \\ &= [\mathscr{L}(\ldots)](p) \end{aligned}$$

b) Quel est le plus grand intervalle sur lequel cet original s'annule ?

3) Retrouver la transformée de Laplace de la fonction créneau $\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-2)$ en utilisant $[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) = \frac{1}{p}$ et la propriété de translation de la transformation de Laplace.
4) Soient a, t_1 et t_2 trois réels tels que $t_1 < t_2$.
Utiliser la propriété de translation de la transformation de Laplace pour déterminer une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle telle que :

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{e^{-(t_2-t_1)p}}{p-a}$$

5) Démontrer la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée pour les fonctions continues par morceaux :

Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, à croissance au plus exponentielle, dérivable en chaque point où elle est continue et dont la dérivée g' est continue par morceaux et à croissance au plus exponentielle.

$$[\mathscr{L}(g'(t))](p) = p \times [\mathscr{L}(g(t))](p) - g(0^+) \qquad \text{en notant } g(0^+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} g(t) \qquad \text{(à savoir par cœur)}$$

Notons pour finir que pour cette nouvelle classe de fonctions, on a tout de même encore une sorte de propriété d'injectivité de la transformation de Laplace :

Soient g_1 et g_2 deux fonctions définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.

Si $\quad [\mathscr{L}(g_1(t))](p) = [\mathscr{L}(g_2(t))](p)$,

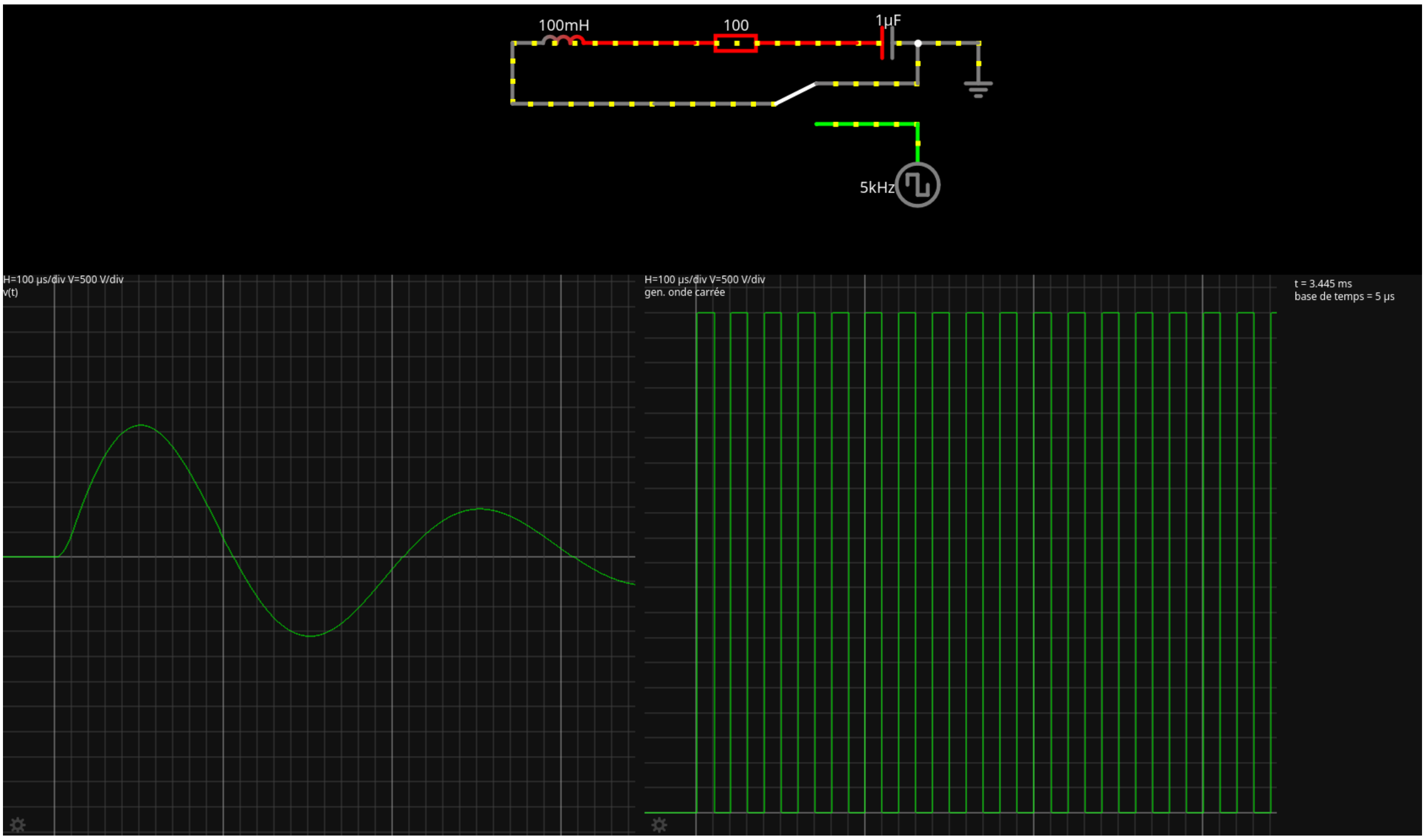
alors $\quad g_1(t) = g_2(t)$ en tout point t où g_1 et g_2 sont continues. (à savoir par cœur)

4.5 Réponse d'un circuit RC à une excitation en créneau

Refaire l'exercice de la section 4.1 en excitant cette fois le circuit RC avec le créneau $e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t - t_0)$.

4.6 Réponse d'un circuit RLC série sous-amorti à une impulsion

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante :



Avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator », on n'excite le circuit qu'avec le premier créneau du signal carré via un commutateur pour exciter le circuit avec l'impulsion en Volts $e(t) = \frac{1}{\tau}(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-\tau))$ avec $\tau = 10^{-4}$.

- Avec le générateur et le commutateur, on excite le circuit avec l'impulsion en Volts $e(t) = \frac{1}{\tau}(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-\tau))$ avec $\tau = 10^{-4}$.
- La résistance R est de 100 Ω,
- La bobine est d'inductance $L = 10^{-1}\ H$,
- Le condensateur est de capacité $C = 10^{-6}\ F$.
- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.
- À l'instant $t = 0$, l'intensité est nulle.

On note :

- $e(t) = \frac{1}{\tau}(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-\tau))$ avec $\tau = 10^{-4}$,
- $v(t)$ la tension aux bornes du condensateur à l'instant t,
- $E(p)$ la transformée de Laplace de $e(t)$. Autrement dit :

$$E(p) = [\mathscr{L}(e(t))](p)$$

- $V(p)$ la transformée de Laplace de $v(t)$. Autrement dit :

$$V(p) = [\mathscr{L}(v(t))](p)$$

On obtient avec le cours sur les circuits électriques :

$$v''(t) + 2\lambda v'(t) + \omega_0^2 v(t) = \omega_0^2 e(t) \qquad \text{où on a noté} \begin{cases} \lambda = \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}$$

Comme l'intensité et la tension aux bornes du condensateur sont nulles à $t = 0$, on a les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Transformée de Laplace du signal d'entrée (de l'excitation) :

$$E(p) = \frac{1}{\tau p}\left(1 - e^{-\tau p}\right)$$

On applique la transformation de Laplace :

$$\left(p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2\right) V(p) = \omega_0^2 E(p)$$

La fonction de transfert est donc :

$$\frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2}$$

Transformée de Laplace de la réponse du circuit à l'excitation :

$$V(p) = \left(1 - e^{-\tau p}\right) \cdot \frac{\omega_0^2}{\tau p\left(p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2\right)}$$

Pour décomposer en éléments simples $\frac{\omega_0^2}{\tau p\left(p^2+2\lambda p+\omega_0^2\right)}$ dans $\mathbb{R}(X)$, il faut d'abord déterminer si $p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2$ est irréductible ou non dans $\mathbb{R}(X)$ en calculant son discriminant :

$$\Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$$

Il faut donc comparer λ et ω_0 :

$$\lambda = \frac{R}{2L} = \frac{10^2}{2 \times 10^{-1}} = 500$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-1} \times 10^{-6}}} = 10^{\frac{7}{2}}$$
$$\lambda < \omega_0$$

Donc $\Delta < 0$ (il s'agit bien d'un oscillateur harmonique sous-amorti) et le polynôme $p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}(X)$. La décomposition en éléments simples de $\frac{\omega_0^2}{\tau p\left(p^2+2\lambda p+\omega_0^2\right)}$ est donc de la forme suivante :

$$\frac{\omega_0^2}{\tau p\left(p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2\right)} = \frac{a}{p} + \frac{bp + c}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2}$$

Avec la méthode du cache, on obtient :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\tau} \\ b = -\frac{1}{\tau} \\ c = \frac{-2\lambda}{\tau} \end{cases}$$

Recherche de l'original de l'élément simple de dénominateur de degré 2 :

$$\frac{bp + c}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2} = \frac{bp + c}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} \qquad \text{où on a noté } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$
$$= b\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} + \frac{c - b\lambda}{\omega}\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= b\left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\cos(\omega t)\right)\right](p+\lambda) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\sin(\omega t)\right)\right](p+\lambda) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right](p+\lambda) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\,e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right](p)
\end{aligned}
$$

Détermination de la réponse $v(t)$:

$$
\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}(v(t))\right](p) &= V(p) \\
&= \left(1-e^{-\tau p}\right)\cdot\frac{\omega_0^2}{\tau p\left(p^2+2\lambda p+\omega_0^2\right)} \\
&= \left(1-e^{-\tau p}\right)\cdot\left(\frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+2\lambda p+\omega_0^2}\right) \\
&= \left(1-e^{-\tau p}\right)\cdot\left(a\left[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))\right](p) + \frac{bp+c}{p^2+2\lambda p+\omega_0^2}\right) \\
&= \left(1-e^{-\tau p}\right)\cdot\left(a\left[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))\right](p) + \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\,e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right](p)\right) \\
&= \left(1-e^{-\tau p}\right)\cdot\left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right)\right](p) - e^{-\tau p}\left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right)\right)\right](p) \\
&\qquad - \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t-\tau)\left(a+e^{-\lambda(t-\tau)}\left(b\cos(\omega(t-\tau)) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))\right)\right)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right) - \mathscr{U}(t-\tau)\left(a+e^{-\lambda(t-\tau)}\left(b\cos(\omega(t-\tau)) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))\right)\right)\right)\right](p)
\end{aligned}
$$

Donc :

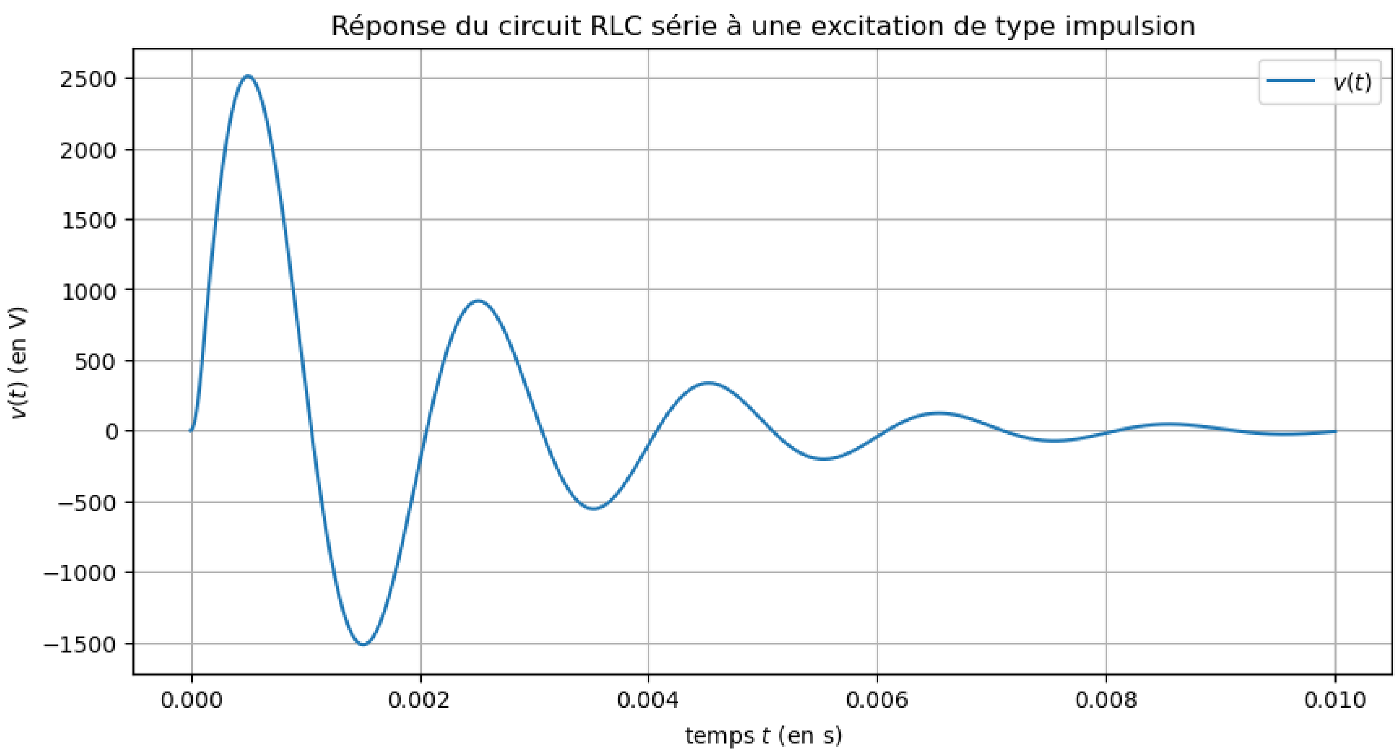
$$
\boxed{
\begin{gathered}
v(t) = \mathscr{U}(t)\left(a+e^{-\lambda t}\left(b\cos(\omega t) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right) - \mathscr{U}(t-\tau)\left(a+e^{-\lambda(t-\tau)}\left(b\cos(\omega(t-\tau)) + \frac{c-b\lambda}{\omega}\sin(\omega(t-\tau))\right)\right) \\
\text{où on a noté } \begin{cases} \lambda = \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \\ a = \frac{1}{\tau} \\ b = -\frac{1}{\tau} \\ c = \frac{-2\lambda}{\tau} \\ \tau = 10^{-4} \\ R = 100 \\ L = 10^{-1} \\ C = 10^{-6} \end{cases}
\end{gathered}
}
$$

On vérifie que l'expression de la réponse $v(t)$ obtenue correspond à la simulation en traçant sa courbe via le code *Python* suivant :

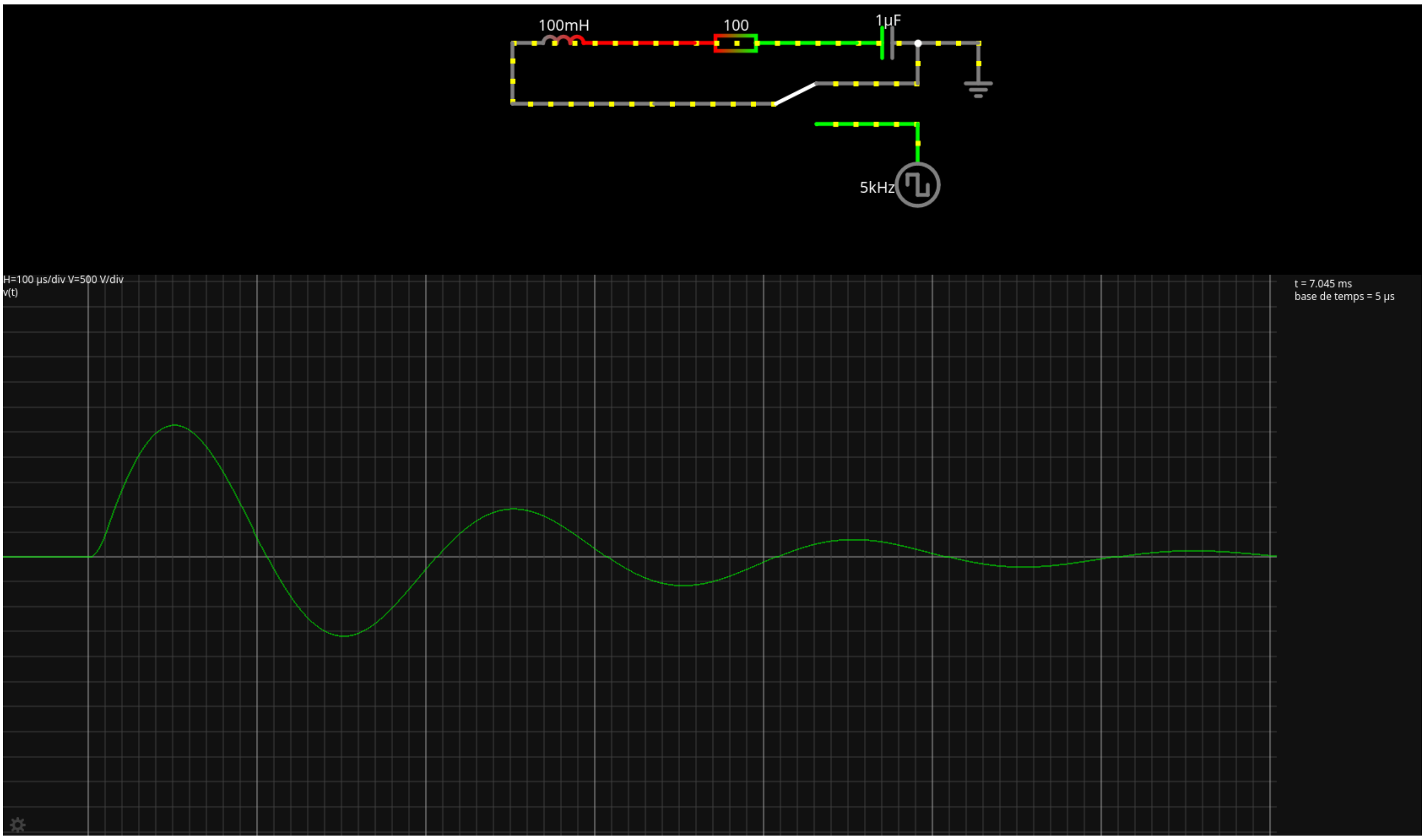
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# paramètres du circuit
R = 100   # Ohms
L = 0.1   # Henrys
C = 1e-6  # Farads
tau = 1e-4  # secondes

# paramètres calculés
lambda_ = R / (2 * L)
omega_0 = np.sqrt(1 / (L * C))
omega = np.sqrt(omega_0**2 - lambda_**2)

# coefficients de la décomposition en éléments simples
a = 1 / tau
b = -1 / tau
c = -2 * lambda_ / tau
```

```
# temps
t = np.linspace(0, 0.01, 1000)  # 10 ms

# définition de la réponse v(t)
def v(t):
    return (np.heaviside(t, 1) * (
            a +
            np.exp(-lambda_ * t) * (
                b * np.cos(omega * t) +
                (c - b * lambda_) / omega * np.sin(omega * t)
            )
        ) -
        np.heaviside(t - tau, 1) * (
            a +
            np.exp(-lambda_ * (t - tau)) * (
                b * np.cos(omega * (t - tau)) +
                (c - b * lambda_) / omega * np.sin(omega * (t - tau))
            )
        )
    )

# calcul de la réponse v(t)
v_t = v(t)

# tracé de la fonction v(t)
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, v_t, label='$v(t)$')
plt.title('Réponse du circuit RLC série à une excitation de type impulsion')
plt.xlabel('temps $t$ (en s)')
plt.ylabel('$v(t)$ (en V)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Les captures d'écran suivantes montrent que l'expression obtenue précédemment correspond bien à la simulation :



Courbe de la réponse $v(t)$ obtenue avec l'interface de *Jupyter* et l'expression précédente.



Courbe de la réponse $v(t)$ obtenue avec l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator ».

4.7 Réponse d'un circuit RLC série critiquement-amorti à une impulsion

Refaire la section 4.6 en modifiant la valeur de R de façon à obtenir un oscillateur critiquement amorti.

4.8 Réponse d'un circuit RLC série sur-amorti à une impulsion

Refaire la section 4.6 en modifiant la valeur de R de façon à obtenir un oscillateur sur-amorti.