CORRECTION DES EXERCICES SUR LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ONT POSÉ PROBLÈME

S. Labopin

Table des matières

1 Un exemple très simple de voyage aller-retour entre le monde de l'analyse et le monde de l'algèbre pour résoudre un problème de Cauchy (*section 2.2 question 1) du cours*)

1.1 Énoncé

Dans cet exercice, on illustre l'abstraction de la section précédente (la section 2.1) avec un exemple très concret consistant en la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait réussi à construire une navette $\mathscr{L}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et pour g_1, g_2 deux fonctions, on a :

$$\left[\mathscr{L}\left(a\,.\,g_1(t) + b\,.\,g_2(t)\right)\right](p) = a\,.\,\left[\mathscr{L}\left(g_1(t)\right)\right](p) + b\,.\,\left[\mathscr{L}\left(g_2(t)\right)\right](p)$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left[\mathscr{L}\left(e^{\alpha t}\right)\right](p) = \frac{1}{p-\alpha}$$

(iii) Pour toute fonction dérivable g, on a :

$$\left[\mathscr{L}\left(g'(t)\right)\right](p) = p \times \left[\mathscr{L}\left(g(t)\right)\right](p) - g(0) \quad \text{(La dérivation devient des opérations algébriques!)}$$

On note f une solution de ce problème de Cauchy.
On a donc :

$$\begin{cases} f'(t) + 2f(t) = e^t \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$a)$ En utilisant la propriété (ii), calculer $\left[\mathscr{L}\left(e^t\right)\right](p)$.

$b)$ En utilisant les propriétés (i) et (iii), démontrer que :

$$\left[\mathscr{L}\left(f'(t) + 2f(t)\right)\right](p) = (p+2) \times \left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) - 1$$

$c)$ Déduire des deux questions précédentes que :

$$\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) = \frac{p}{(p-1)(p+2)}$$

$d)$ Décomposer la fraction rationnelle $\frac{p}{(p-1)(p+2)}$ en éléments simples.

$e)$ En utilisant la propriété (ii), déterminer une fonction g telle que :

$$\left[\mathscr{L}\left(g(t)\right)\right](p) = \frac{1}{p+2}$$

$f)$ En utilisant la propriété (i), déduire des trois questions précédentes et de la question a) que :

$$\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) = \left[\mathscr{L}\left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}\right)\right](p)$$

$g)$ Vérifier que la fonction $\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}$ est la solution du problème de Cauchy.

1.2 Correction

$a)$ En appliquant la propriété (ii) pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$\left[\mathscr{L}\left(e^t\right)\right](p) = \frac{1}{p-1}$$

$b)$

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}\left(f'(t) + 2f(t)\right)\right](p) &= \left[\mathscr{L}\left(f'(t)\right)\right](p) + 2\,.\,\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) && \text{(en appliquant la propriété } (i) \text{ avec } g_1 = f', g_2 = f, a = 1, b = 2) \\
&= p \times \left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) - f(0) + 2\,.\,\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) && \text{(en appliquant la propriété } (ii) \text{ avec } g = f) \\
&= p \times \left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) - 1 + 2\,.\,\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) && \text{(car } f(0) = 1) \\
&= (p+2) \times \left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\right](p) - 1
\end{aligned}$$

c)

$f'(t)+2f(t)=e^t$ (Ces deux fonctions sont égales.)

$[\mathscr{L}(f'(t)+2f(t))](p)=[\mathscr{L}(e^t)](p)$ (Donc leurs transformées de Laplace sont égales.)

$[\mathscr{L}(f'(t)+2f(t))](p)=\dfrac{1}{p-1}$ (via a))

$(p+2)\times[\mathscr{L}(f(t))](p)-1=\dfrac{1}{p-1}$ (via b))

$(p+2)\times[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{1}{p-1}+1$

$(p+2)\times[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{p-1}{p-1}$

$(p+2)\times[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{p}{p-1}$

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{p}{(p-1)(p+2)}$ (La transformation de Laplace transforme la solution recherchée en une fraction rationnelle connue!)

$f(t)\overset{\mathscr{L}}{\longmapsto}\dfrac{p}{(p-1)(p+2)}$ (La transformation de Laplace transforme la solution recherchée en une fraction rationnelle connue!)

$?\overset{\mathscr{L}}{\longmapsto}\dfrac{p}{(p-1)(p+2)}$ (L'idée des questions suivantes est de trouver une fonction dont la transformée de Laplace est cette fraction rationnelle puis de vérifier qu'une telle fonction est effectivement la solution du problème de Cauchy. C'est ce que l'on a appelé dans la section précédente « **prendre la navette en sens inverse depuis la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ pour arriver directement à la destination visée f**, une solution de l'équation différentielle ».)

d) Avec la méthode du cache, on obtient :

$$\frac{p}{(p-1)(p+2)}=\frac{\frac{1}{3}}{(p-1)}+\frac{\frac{2}{3}}{(p+2)}$$

e) En appliquant la propriété (ii) pour $\alpha=-2$, on obtient :

$[\mathscr{L}(e^{-2t})](p)=\dfrac{1}{p+2}$ (La transformation de Laplace envoie la fonction $t\longmapsto e^{-2t}$ sur la fonction rationnelle $p\longmapsto\frac{1}{p+2}$)

f)

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{p}{(p-1)(p+2)}$ (via c))

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{\frac{1}{3}}{p-1}+\dfrac{\frac{2}{3}}{p+2}$ (via d))

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{p+2}$

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{2}{3}\cdot[\mathscr{L}(e^{-2t})](p)$ (via e))

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\dfrac{1}{3}\cdot[\mathscr{L}(e^{t})](p)+\dfrac{2}{3}\cdot[\mathscr{L}(e^{-2t})](p)$ (via ii) avec $\alpha=1$)

$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\left[\mathscr{L}\left(\dfrac{1}{3}\cdot e^t+\dfrac{2}{3}\cdot e^{-2t}\right)\right](p)$ (via (i) avec $g_1(t)=e^t$, $g_2(t)=e^{2t}$, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$)

g) On vérifie que la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t)+2y(t)=e^t \\ y(0)=1\end{cases}$ est $f(t)=\frac{1}{3}\cdot e^t+\frac{2}{3}\cdot e^{-2t}$.

En notant $f(t)=\frac{1}{3}\cdot e^t+\frac{2}{3}\cdot e^{-2t}$, on a :

$$f'(t)=\frac{1}{3}\cdot e^t+(-2)\times\frac{2}{3}\cdot e^{-2t}$$

$$f'(t)=\frac{1}{3}\cdot e^t-\frac{4}{3}\cdot e^{-2t}$$

$$\begin{aligned}
f'(t)+2f(t) &= \frac{1}{3}\,.\,e^{t}-\frac{4}{3}\,.\,e^{-2t}+2\,.\,\left(\frac{1}{3}\,.\,e^{t}+\frac{2}{3}\,.\,e^{-2t}\right)\\
&= e^{t}\,.\,\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+e^{-2t}\,.\,\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)\\
&= e^{t}\\
f(0) &= \frac{1}{3}\,.\,e^{0}+\frac{2}{3}\,.\,e^{-2\times 0}\\
&= \frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times 1\\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $f(t)=\frac{1}{3}\,.\,e^{t}+\frac{2}{3}\,.\,e^{-2t}$ est bien la solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y'(t)+2y(t)=e^{t} \\ y(0)=1 \end{array}\right.$.

2 Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre un problème de Cauchy (*section 3 question 3) du cours*)

2.1 Énoncé

Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) + y'(t) + y(t) = te^t \\ \forall\ k \in [\![0;2]\!],\ y^{(k)}(0) = 0 \end{cases}$$

2.2 Correction

Soit f la solution.
Calculons d'abord séparément la transformée de Laplace du second membre de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} [\mathscr{L}(te^t)](p) &= -\frac{d}{dp}\left([\mathscr{L}(e^t)](p)\right) && \text{(via la propriété de dérivation d'une transformée de Laplace)} \\ &= -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-1}\right) \\ &= \frac{1}{(p-1)^2} \end{aligned}$$

Calculons maintenant séparément les transformées de Laplace des dérivées successives de f :

$$\begin{aligned} [\mathscr{L}(f'(t))](p) &= p \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - f(0) \\ [\mathscr{L}(f''(t))](p) &= p \times [\mathscr{L}(f'(t))](p) - f'(0) \\ &= p \times \left(p \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - f(0)\right) - f'(0) \\ &= p^2 \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - pf(0) - f'(0) \\ [\mathscr{L}(f'''(t))](p) &= p \times [\mathscr{L}(f''(t))](p) - f''(0) \\ &= p \times \left(p^2 \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - pf(0) - f'(0)\right) - f''(0) \\ &= p^3 \times [\mathscr{L}(f(t))](p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0) \end{aligned}$$

Comme f est solution de l'équation, on a :

$$f^{(3)}(t) + f^{(2)}(t) + f'(t) + f(t) = te^t$$

On en déduit comme d'habitude une équation algébrique dont la transformée de Laplace de f est solution :

$$f^{(3)}(t) + f^{(2)}(t) + f'(t) + f(t) = te^t \qquad \text{(Ces deux fonctions sont égales.)}$$

$$[\mathscr{L}(\ f^{(3)}(t) + f^{(2)}(t) + f'(t) + f(t)\ )](p) = [\mathscr{L}(\ te^t\ )](p) \qquad \text{(Donc leurs transformées de Laplace sont égales.)}$$

$$p^3 \,.\, [\mathscr{L}(f(t))](p) - p^2 \,.\, f(0) - p \,.\, f'(0) - f^{(2)}(0) + p^2 \,.\, [\mathscr{L}(f(t))](p) - p \,.\, f(0) - f'(0) + p \,.\, [\mathscr{L}(f(t))](p) - f(0) + [\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

(via les calculs de la transformée de Laplace des dérivées successives et du second membre précédents)

$$\left(p^3 + p^2 + p + 1\right) . [\mathscr{L}(f(t))](p) - \left(p^2 + p + 1\right) . f(0) - (p+1) . f'(0) - f''(0) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\left(p^3 + p^2 + p + 1\right) . [\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p-1)^2} \qquad \text{(via } \forall\ k \in [\![0;2]\!],\ y^{(k)}(0) = 0\text{)}$$

$$\frac{p^4-1}{p-1} . [\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p-1)(p^4-1)}$$

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{1}{(p+1)(p+i)(p-i)(p-1)^2}$$

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{(p+1)(p+i)(p-i)(p-1)^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)(p+i)(p-i)(p-1)^2} &= \frac{a}{p-1} + \frac{b}{(p-1)^2} + \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p+i} + \frac{e}{p-i} \\ &= \frac{a}{p-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(p-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{p+1} + \frac{\frac{1+i}{8}}{p+i} + \frac{\frac{1-i}{8}}{p-i} && \text{(via la méthode du cache)} \\ &= \frac{\frac{-3}{8}}{p-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(p-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{p+1} + \frac{\frac{1+i}{8}}{p+i} + \frac{\frac{1-i}{8}}{p-i} && \left(\text{car l'évaluation en 0 donne } 1 = -a + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - i\frac{1+i}{8} + i\frac{1-i}{8}\right) \end{aligned}$$

En utilisant cette décomposition, on recherche l'original de cette fraction rationnelle puisque celle-ci coïncide avec la solution recherchée f (d'après la propriété d'injectivité de la transformation de Laplace) :

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{-3}{8} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1+i}{8} \cdot \frac{1}{p+i} + \frac{1-i}{8} \cdot \frac{1}{p-i}$$

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \frac{-3}{8} \cdot [\mathscr{L}(e^t)](p) + \frac{1}{4} \cdot [\mathscr{L}(te^t)](p) + \frac{1}{8} \cdot [\mathscr{L}(e^{-t})](p) + \frac{1+i}{8} \cdot \left[\mathscr{L}\left(e^{-it}\right)\right](p) + \frac{1-i}{8} \cdot \left[\mathscr{L}\left(e^{it}\right)\right](p)$$

(on a réutilisé l'un calcul précédent : $\frac{1}{(p-1)^2} = \frac{d}{dp}\left(\frac{-1}{p-1}\right) = -\frac{d}{dp}\left([\mathscr{L}(e^t)](p)\right) = [\mathscr{L}(te^t)](p)$)

$$[\mathscr{L}(f(t))](p) = \left[\mathscr{L}\left(\frac{-3}{8} \,.\, e^t + \frac{1}{4} \,.\, te^t + \frac{1}{8} \,.\, e^{-t} + \frac{1+i}{8} \,.\, e^{-it} + \frac{1-i}{8} \,.\, e^{it}\right)\right](p)$$ (par linéarité de la transformation de Laplace)

$$f(t) = \frac{-3}{8} \,.\, e^t + \frac{1}{4} \,.\, te^t + \frac{1}{8} \,.\, e^{-t} + \frac{1+i}{8} \,.\, e^{-it} + \frac{1-i}{8} \,.\, e^{it}$$ (d'après la propriété d'injectivité de la transformation de Laplace)

$$f(t) = \frac{-3}{8} \,.\, e^t + \frac{1}{4} \,.\, te^t + \frac{1}{8}\cos(t) - \frac{i}{8}2i\sin(t)$$ (via les formules d'Euler)

$$f(t) = \frac{-3}{8} \,.\, e^t + \frac{1}{4} \,.\, te^t + \frac{1}{8}(\cos(t) + \sin(t))$$

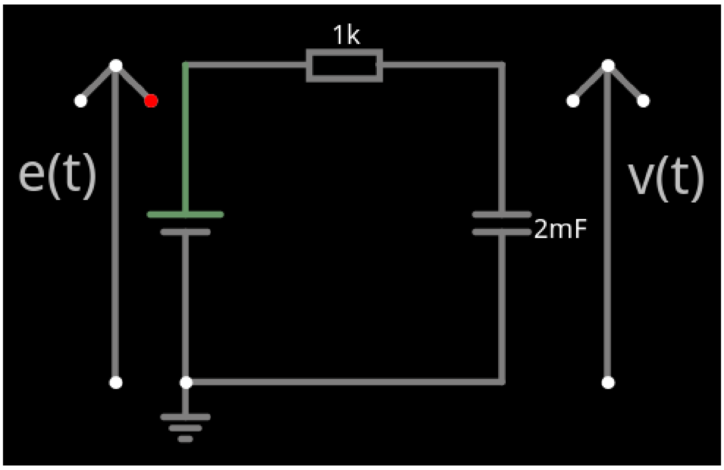
En définitive, la solution de ce problème de Cauchy est la suivante :

$$\boxed{f(t) = \frac{-3}{8} \,.\, e^t + \frac{1}{4} \,.\, te^t + \frac{1}{8}(\cos(t) + \sin(t))}$$

3 Réponse d'un circuit RC à une excitation constante (*section 4.1 du cours*)

3.1 Énoncé

On considère le circuit électrique représenté dans la capture d'écran suivante :



- La tension aux bornes du générateur est constante égale à 1 V.
- La résistance R est de 1 000 Ω,
- Le condensateur est de capacité $C = 2\ mF$.
- À l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle.

On note :

- $e(t)$ la tension aux bornes du générateur à l'instant t,
- $v(t)$ la tension aux bornes du condensateur à l'instant t,
- $E(p)$ la transformée de Laplace de $e(t)$. Autrement dit :

$$E(p) = [\mathscr{L}(e(t))](p)$$

- $V(p)$ la transformée de Laplace de $v(t)$. Autrement dit :

$$V(p) = [\mathscr{L}(v(t))](p)$$

1) Calculer $E(p)$, la transformée de Laplace de l'excitation causée par le générateur sur le circuit RC.
2) Démontrer que :

$$RCv'(t) + v(t) = e(t)$$

3) En déduire que la fonction de transfert est définie par la formule suivante :

$$T(p) = \frac{1}{2p+1}$$

4) En déduire que :

$$V(p) = \frac{1}{p(2p+1)}$$

5) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{p(2p+1)}$ en éléments simples.
6) En déduire $v(t)$, la réponse du système.
7) En utilisant l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator », vérifier les résultats obtenus avec une simulation :

3.2 Correction

1) On calcule $E(p)$, la transformée de Laplace de l'excitation causée par le générateur sur le circuit RC :

$$\begin{aligned} E(p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) \\ &= [\mathscr{L}(1)](p) \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} e(t) &= u_R(t) + v(t) && \text{(via la loi des Mailles)} \\ &= R.i(t) + v(t) && \text{(via la loi d'Ohm)} \\ &= R \cdot C \cdot v'(t) + v(t) && \text{(car la tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la change accumulée et est inversement proportionnelle à la capacité)} \end{aligned}$$

Donc :

$$RCv'(t) + v(t) = e(t)$$

3)

$$\begin{aligned} \left[\mathscr{L}\left(RCv'(t)+v(t)\right)\right](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(en appliquant la transformation de Laplace à chaque membre de l'égalité démontrée dans la question précédente)} \\ RC\left[\mathscr{L}\left(v'(t)\right)\right](p) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(en appliquant la linéarité de la transformation de Laplace)} \\ RC\left(p\cdot[\mathscr{L}(v(t))](p) - v(0)\right) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{((via la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée)} \\ RCp[\mathscr{L}(v(t))](p) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(car à l'instant } t=0\text{, la tension aux bornes du condensateur est nulle)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RCpV(p) + V(p) &= E(p) && \text{(} V(p) \text{ est solution d'une équation algébrique !)} \\ (RCp+1)\cdot V(p) &= E(p) \\ V(p) &= \frac{1}{RCp+1}\cdot E(p) \\ V(p) &= \frac{1}{2p+1}\cdot E(p) \end{aligned}$$

Donc la fonction de transfert est la fonction T suivante :

$$T(p) = \frac{1}{2p+1}$$

4)

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{1}{2p+1}\cdot E(p) \\ &= \frac{1}{2p+1}\cdot\frac{1}{p} && \text{(car } E(p) = \tfrac{1}{p}\text{)} \end{aligned}$$

Donc :

$$V(p) = \frac{1}{p(2p+1)}$$

5) On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{p(2p+1)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1} \qquad \text{(via le théorème de décomposition en éléments simples)}$$

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{b}{2p+1} \qquad \text{(car via la méthode du cache on a } a = \left.\frac{1}{\blacksquare(2p+1)}\right|_{p=0} = 1\text{)}$$

On cache « p »

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{-2}{2p+1} \qquad \text{(car via la méthode du cache on a } b = \left.\frac{1}{p\,\blacksquare}\right|_{p=-\frac{1}{2}} = -2\text{)}$$

On cache « $(2p+1)$ »

Donc :

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{2}{2p+1}$$

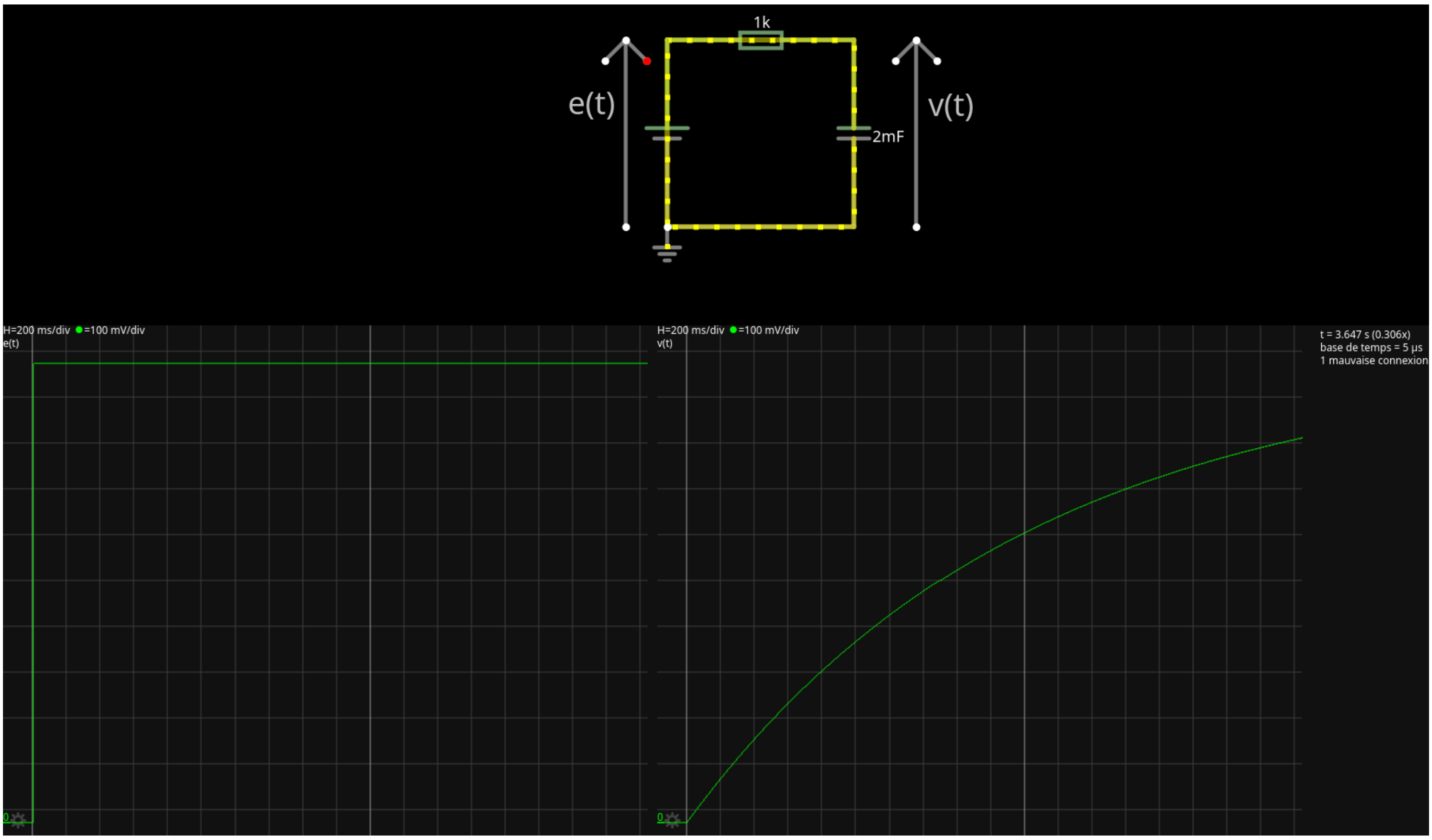
6) On va déduire $v(t)$ de la décomposition en éléments simples de sa transformée de Laplace $V(p)$ en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace et en déterminant l'original de chacun des éléments simples :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}(v(t))](p) &= V(p) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{2}{2p+1} \\
&= [\mathscr{L}(1)](p) - \frac{1}{p-\left(-\frac{1}{2}\right)} && \text{(via la formule du cours « } [\mathscr{L}(e^{\alpha t})](p) = \frac{1}{p-\alpha} \text{ » pour } \alpha = 0\text{)} \\
&= [\mathscr{L}(1)](p) - \left[\mathscr{L}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)\right](p) && \text{(via la formule du cours « } [\mathscr{L}(e^{\alpha t})](p) = \frac{1}{p-\alpha} \text{ » pour } \alpha = -\frac{1}{2}\text{)} \\
&= \left[\mathscr{L}\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)\right](p) && \text{(via la linéarité de la transformation de Laplace)}
\end{aligned}$$

Donc, via la propriété d'injectivité de la transformation de Laplace, on obtient :

$$\boxed{v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}}$$

7) En utilisant l'interface en ligne du simulateur « Falstad Circuit Simulator », on constate que l'on obtient bien la courbe de la fonction $1 - e^{-\frac{t}{2}}$ en simulant ce circuit :



4 Calcul des transformées de Laplace de fonctions causales non continues telles que la fonction échelon unité de Heaviside et les fonctions à un créneau (*section 4.3 du cours*)

4.1 Énoncé

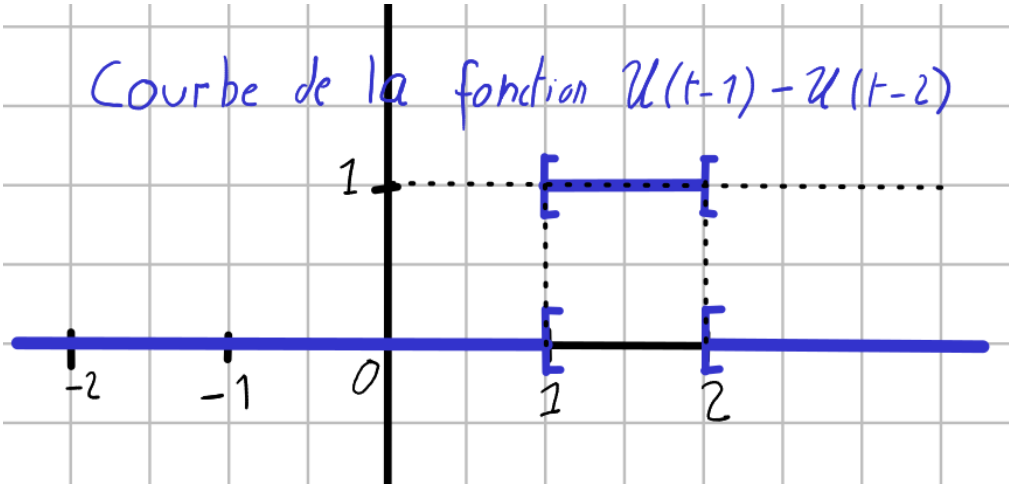
1) Calculer $[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)$.
2) Tracer le graphe de la fonction créneau $\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2)$ et calculer sa transformée de Laplace.

4.2 Correction

1) C'est le même calcul qu'avec l'ancienne définition de la transformation de Laplace pour les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à croissance au plus exponentielle puisque la restriction de $\mathscr{U}$ à $\mathbb{R}^+$ est continue :

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathscr{U}(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\times 1\,dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

2) On trace le graphe de la fonction créneau $\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2)$:



On calcule sa transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2))](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2))\,dt \\ &= \int_1^2 e^{-pt}dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_1^2 \\ &= \frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p}\end{aligned}$$

5 Démontrer et utiliser les propriétés vérifiées par la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle (*section 4.4 du cours*)

5.1 Énoncé

1) Démontrer la propriété de translation de la transformation de Laplace :

> Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.
>
> $$\forall\ t_0 \in \mathbb{R}^+,\ \left[\mathscr{L}\left(g\left(t-t_0\right)\right)\right]\left(p\right) = e^{-t_0 p}\left[\mathscr{L}\left(g\left(t\right)\right)\right]\left(p\right) \qquad \text{(à savoir par cœur)}$$

2) *a)* En prenant garde à l'encadré précédent et en utilisant la propriété de translation de la transformation de Laplace, recopier et compléter la recherche d'original suivante :

$$\begin{aligned}\frac{e^{-2p}}{p} &= e^{-2p}\ .\ \left[\mathscr{L}\left(...\right)\right]\left(p\right)\\ &= \left[\mathscr{L}\left(...\right)\right]\left(p\right)\end{aligned}$$

b) Quel est le plus grand intervalle sur lequel cet original s'annule ?

3) Retrouver la transformée de Laplace de la fonction créneau $\mathscr{U}\left(t-1\right)-\mathscr{U}\left(t-2\right)$ en utilisant $\left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}\left(t\right)\right)\right]\left(p\right)=\frac{1}{p}$ et la propriété de translation de la transformation de Laplace.

4) Soient a, t_1 et t_2 trois réels tels que $t_1 < t_2$.
Utiliser la propriété de translation de la transformation de Laplace pour déterminer une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle telle que :

$$\left[\mathscr{L}\left(f\left(t\right)\right)\right]\left(p\right) = \frac{e^{-\left(t_2-t_1\right)p}}{p-a}$$

5) Démontrer la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée pour les fonctions continues par morceaux :

> Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, à croissance au plus exponentielle, dérivable en chaque point où elle est continue et dont la dérivée g' est continue par morceaux et à croissance au plus exponentielle.
>
> $$\left[\mathscr{L}\left(g'\left(t\right)\right)\right]\left(p\right) = p\times\left[\mathscr{L}\left(g\left(t\right)\right)\right]\left(p\right) - g\left(0^+\right) \qquad \text{en notant } g\left(0^+\right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g\left(t\right) \qquad \text{(à savoir par cœur)}$$

5.2 Correction

1) On démontre la propriété de translation de la transformation de Laplace.
Soient $t_0 \in \mathbb{R}^+$ et g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle.
On a :

$$\begin{aligned}\left[\mathscr{L}\left(g\left(t-t_0\right)\right)\right]\left(p\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}g\left(t-t_0\right)dt\\ &= \int_{-t_0}^{+\infty} e^{-p\left(s+t_0\right)}g\left(s\right)ds \qquad \text{(via le changement de variable } s=t-t_0\text{)}\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-p\left(s+t_0\right)}g\left(s\right)ds \qquad \text{(car } g\left(s\right)=0\ \forall\ s\in\left[-t_0;0\right[\text{)}\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt_0}e^{-ps}g\left(s\right)ds\\ &= e^{-pt_0}\int_0^{+\infty} e^{-ps}g\left(s\right)ds\\ &= e^{-t_0p}\left[\mathscr{L}\left(g\left(t\right)\right)\right]\left(p\right)\end{aligned}$$

2) *a)*

$$\begin{aligned}\frac{e^{-2p}}{p} &= e^{-2p}\ .\ \left[\mathscr{L}\left(\boldsymbol{\mathscr{U}\left(t\right)}\right)\right]\left(p\right)\\ &= \left[\mathscr{L}\left(\boldsymbol{\mathscr{U}\left(t-2\right)}\right)\right]\left(p\right) \qquad \text{(via la propriété de translation de la transformation de Laplace)}\end{aligned}$$

b) Le plus grand intervalle sur lequel l'original $\mathscr{U}(t-2)$ de la fonction $\frac{e^{-2p}}{p}$ s'annule est $]-\infty;2[$.

3) On retrouve la transformée de Laplace de la fonction créneau $\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2)$ en utilisant $[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)=\frac{1}{p}$ et la propriété de translation de la transformation de Laplace :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1)-\mathscr{U}(t-2))](p) &= [\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-1))](p)-[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-2))](p) && \text{(par linéarité de la transformation de Laplace)}\\
&= e^{-p}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p)-e^{-2p}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) && \text{(via la propriété de translation de la transformation de Laplace)}\\
&= e^{-p}\cdot\frac{1}{p}-e^{-2p}\cdot\frac{1}{p}\\
&= \frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p}
\end{aligned}$$

4) Soient a, t_1 et t_2 trois réels tels que $t_1<t_2$.
On détermine une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à croissance au plus exponentielle telle que :

$$[\mathscr{L}(f(t))](p)=\frac{e^{-(t_2-t_1)p}}{p-a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-(t_2-t_1)p}}{p-a} &= e^{-(t_2-t_1)p}\cdot\frac{1}{p-a}\\
&= e^{-(t_2-t_1)p}\cdot[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p-a)\\
&= e^{-(t_2-t_1)p}\cdot\left[\mathscr{L}\left(e^{at}\mathscr{U}(t)\right)\right](p) && \text{(via la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace)}\\
&= \left[\mathscr{L}\left(e^{a(t-t_2+t_1)}\mathscr{U}(t-t_2+t_1)\right)\right](p) && \text{(via la propriété de translation de la transformation de Laplace)}
\end{aligned}$$

Donc la fonction $f(t)=e^{a(t-t_2+t_1)}\cdot\mathscr{U}(t-t_2+t_1)$ convient : C'est un original de la fonction $\frac{e^{-(t_2-t_1)p}}{p-a}$.

5) On démontrer la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée pour les fonctions continues par morceaux :
Soit g une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, à croissance au plus exponentielle, dérivable en chaque point où elle est continue et dont la dérivée g' est continue par morceaux et à croissance au plus exponentielle.

$$\begin{aligned}
\left[\mathscr{L}\left(g'(t)\right)\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}g'(t)\,dt\\
&= \left[e^{-pt}g(t)\right]_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)\,dt && \text{(via une intégration par parties)}\\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{-pt}g(t)-\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} e^{-pt}g(t)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)\,dt\\
&= 0-\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} e^{-pt}g(t)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)\,dt && \text{(car } g \text{ est une fonction à croissance plus exponentielle)}\\
&= 0-\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g(t)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)\,dt && \text{(car } g \text{ admet une limite à droite de 0 car elle est continue par morceaux)}\\
&= p\times\left[\mathscr{L}(g(t))\right](p)-g\left(0^+\right) && \text{en notant } g\left(0^+\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g(t)
\end{aligned}$$

6 Déterminer la réponse d'un circuit RC à une excitation en créneau (*section 4.5 du cours*)

6.1 Énoncé

Refaire l'exercice de la section 4.1 en excitant cette fois le circuit RC avec le créneau $e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t - t_0)$.

6.2 Correction

1) On calcule $E(p)$, la transformée de Laplace de l'excitation causée par le générateur sur le circuit RC :

$$\begin{aligned}
E(p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) \\
&= [\mathscr{L}(\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-t_0))](p) \\
&= [\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) - [\mathscr{L}(\mathscr{U}(t-t_0))](p) \\
&= \frac{1}{p} - e^{-t_0 p}[\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) && \text{(via la propriété de translation de la transformation de Laplace)} \\
&= \frac{1}{p} - e^{-t_0 p}\frac{1}{p} \\
&= \frac{1 - e^{-t_0 p}}{p}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{E(p) = \frac{1 - e^{-t_0 p}}{p}}$$

2) Comme dans la version précédente de cet exercice :

$$\begin{aligned}
e(t) &= u_R(t) + v(t) && \text{(via la loi des Mailles)} \\
&= R.i(t) + v(t) && \text{(via la loi d'Ohm)} \\
&= R \cdot C \cdot v'(t) + v(t) && \text{(car la tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge accumulée et est inversement proportionnelle à la capacité)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$RCv'(t) + v(t) = e(t)$$

3) Comme dans la version précédente de cet exercice :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}(RCv'(t) + v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(en appliquant la transformation de Laplace à chaque membre de l'égalité démontrée dans la question précédente)} \\
RC[\mathscr{L}(v'(t))](p) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(en appliquant la linéarité de la transformation de Laplace)} \\
RC(p \cdot [\mathscr{L}(v(t))](p) - v(0)) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{((via la formule de la transformée de Laplace d'une dérivée)} \\
RCp[\mathscr{L}(v(t))](p) + [\mathscr{L}(v(t))](p) &= [\mathscr{L}(e(t))](p) && \text{(car à l'instant } t = 0\text{, la tension aux bornes du condensateur est nulle)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RCpV(p) + V(p) &= E(p) && (V(p) \text{ est solution d'une équation algébrique!)} \\
(RCp + 1) \cdot V(p) &= E(p) \\
V(p) &= \frac{1}{RCp + 1} \cdot E(p) \\
V(p) &= \frac{1}{2p + 1} \cdot E(p)
\end{aligned}$$

Donc la fonction de transfert est la fonction T suivante :

$$T(p) = \frac{1}{2p + 1}$$

4)

$$V(p) = \frac{1}{2p+1} \cdot E(p)$$

$$= \frac{1}{2p+1} \cdot \frac{1-e^{-t_0 p}}{p} \qquad \left(\text{car } E(p) = \frac{1-e^{-t_0 p}}{p}\right)$$

Donc :

$$V(p) = \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \frac{1}{p(2p+1)}$$

5) Comme dans la version précédente de cet exercice, on décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{p(2p+1)}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1} \qquad \text{(via le théorème de décomposition en éléments simples)}$$

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{b}{2p+1} \qquad \left(\text{car via la méthode du cache on a } a = \left.\frac{1}{\text{[redacted]}(2p+1)}\right|_{p=0} = 1\right)$$

On cache « p »

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} + \frac{-2}{2p+1} \qquad \left(\text{car via la méthode du cache on a } b = \left.\frac{1}{p\,\text{[redacted]}}\right|_{p=-\frac{1}{2}} = -2\right)$$

On cache « $(2p+1)$ »

Donc :

$$\frac{1}{p(2p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{2}{2p+1}$$

6) On va déduire $v(t)$ d'une expression de sa transformée de Laplace en utilisant la décomposition en éléments simples précédente :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}(v(t))](p) &= V(p) \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{2p+1}\right) \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left([\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) - [\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))]\left(p+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left([\mathscr{L}(\mathscr{U}(t))](p) - \left[\mathscr{L}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\mathscr{U}(t)\right)\right](p)\right) && \text{(via la propriété d'amortissement de la transformation de Laplace)} \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left[\mathscr{L}\left(\mathscr{U}(t) - e^{-\frac{1}{2}t}\mathscr{U}(t)\right)\right](p) && \text{(par linéarité de la transformation de Laplace)} \\
&= \left(1-e^{-t_0 p}\right) \cdot \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t)\right)\right](p) - e^{-t_0 p} \cdot \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t)\right)\right](p) \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t)\right)\right](p) - \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)}\right)\mathscr{U}(t-t_0)\right)\right](p) && \text{(via la propriété de translation de la transformation de Laplace)} \\
&= \left[\mathscr{L}\left(\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t) - \left(1-e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)}\right)\mathscr{U}(t-t_0)\right)\right](p) && \text{(par linéarité de la transformation de Laplace)}
\end{aligned}$$

Donc, via la propriété d'injectivité de la transformation de Laplace, on obtient :

$$\boxed{v(t) = \left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t) - \left(1-e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)}\right)\mathscr{U}(t-t_0) \qquad \text{pour tout } t \text{ différent de } 0 \text{ et } t_0}$$